Rappresentazioni grafiche di funzioni come modellizzazione matematica della realtà

Letizia Pellegrini
Dipartimento di Scienze Economiche
Università di Verona

GRUPPO FORMAZIONE MATEMATICA TOSCANA
"*Giovanni Prodi*"

39° CONVEGNO SULLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

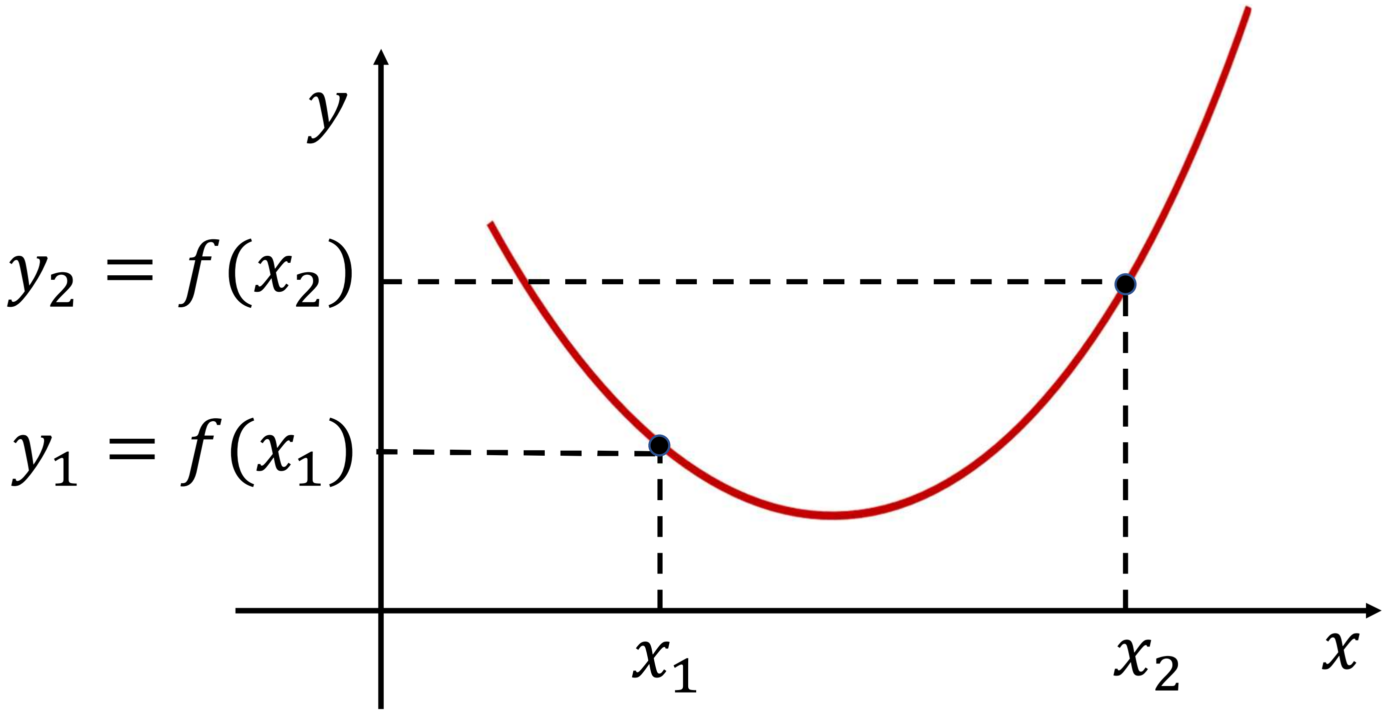
LUCCA
12-13 Settembre 2022

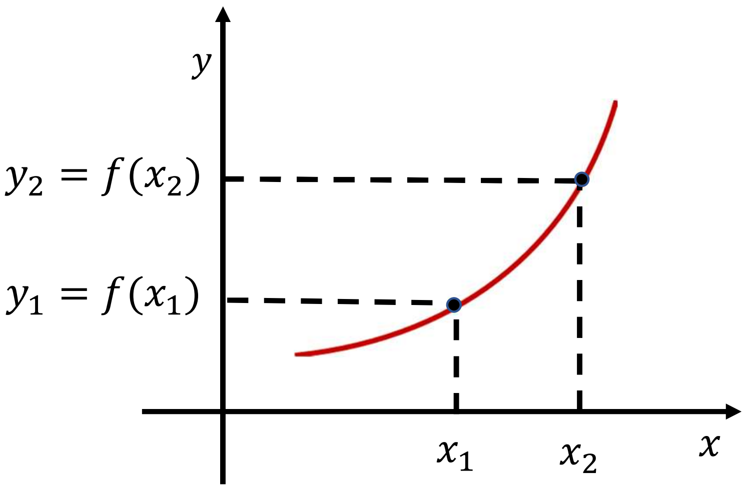
Di tutte le teorie matematiche moderne quella che negli ultimi tempi ha avuto il maggior sviluppo è indubbiamente la teoria delle funzioni. Il secolo che adesso finisce potrebbe chiamarsi, dal punto di vista matematico, il "secolo della teoria delle funzioni ", come il secolo XVII potrebbe essere denominato il "secolo del calcolo infinitesimale".

Conferenza tenuta nel 1900 da Vito Volterra (1860-1940)

$f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$

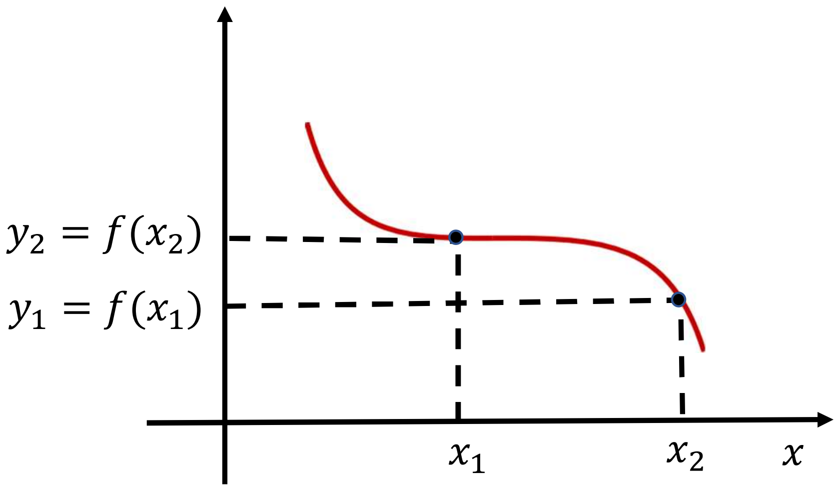
$\operatorname{gr} f = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \colon x \in \boldsymbol{R}, y = f(x)\}$ grafico di f





f crescente in senso stretto

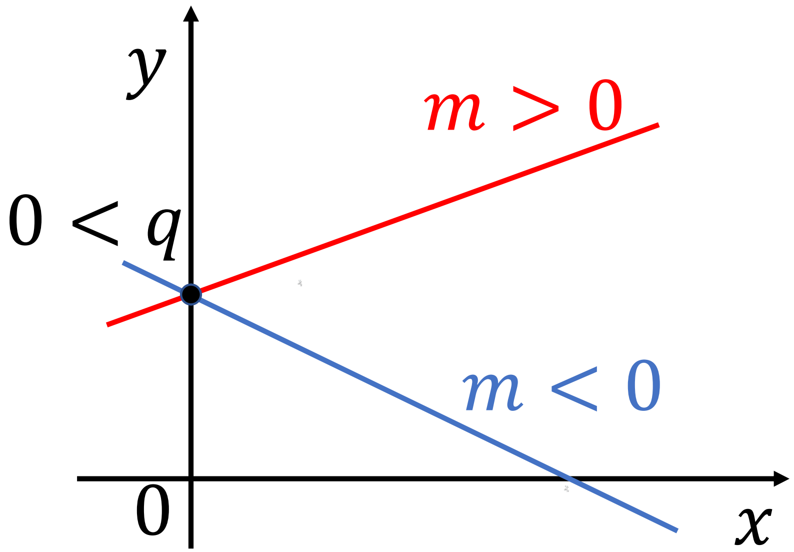
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



f decrescente

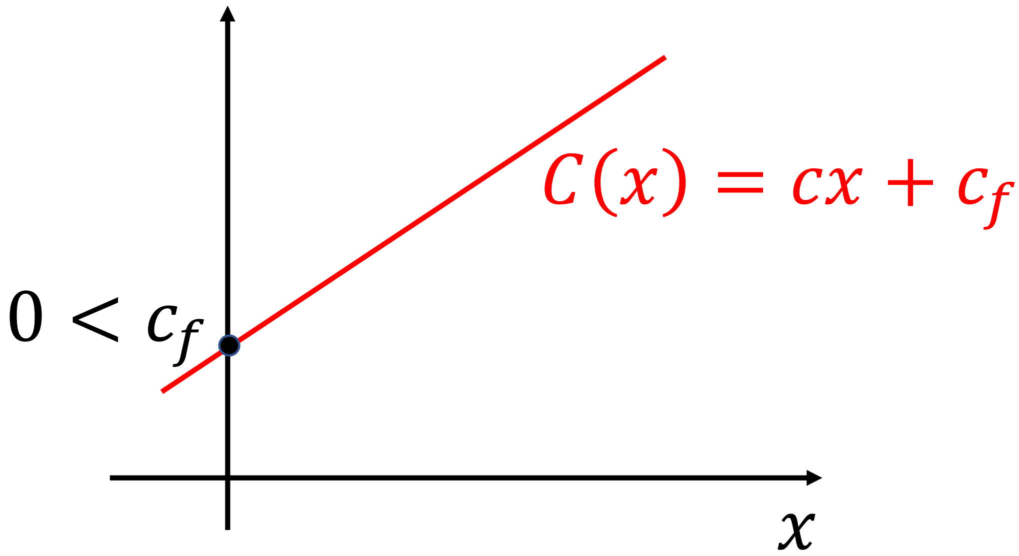
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

f lineare



$y = f(x) = mx + q$

funzione di costo lineare



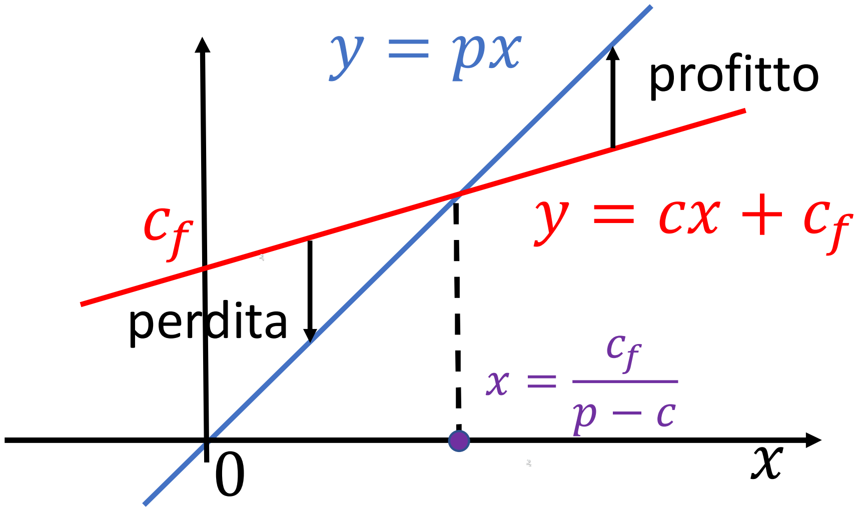
$c > 0$ costo unitario o costo marginale

x quantità prodotta $\rightarrow$ cx costo variabile

$C(0) = c_f$ costo fisso

- Funzione di costo totale $C(x) = cx + c_f$
- Funzione di ricavo totale $R(x) = px$, p prezzo unitario di vendita
- Funzione di profitto

$$P(x) = R(x) - C(x) = px - cx - c_f = (p-c)x - c_f$$



$p > c$

l'ascissa x tale che $(p-c)x - c_f = 0 \iff x = \frac{c_f}{p-c}$ è detta *punto di pareggio,* è la produzione sufficiente per coprire i costi.

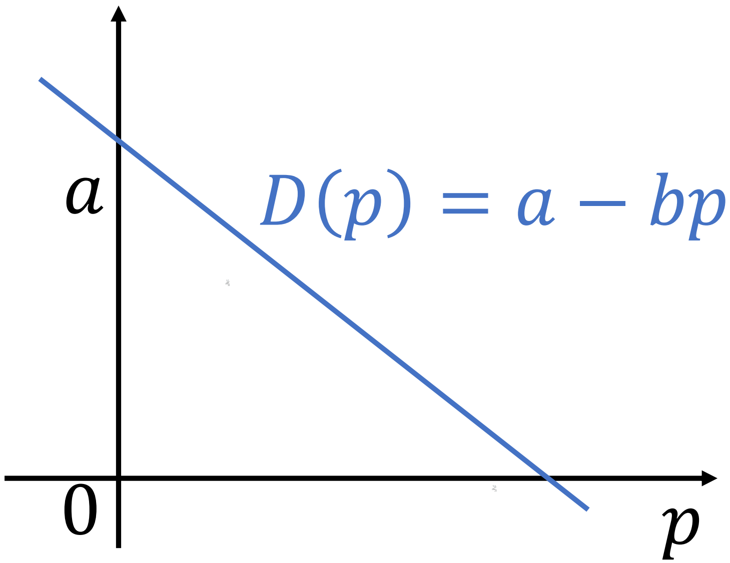
Funzioni lineari

- Funzione di costo totale $C(x) = cx + c_f$
- Funzione di ricavo totale $R(x) = px$
- Funzione di profitto

$$P(x) = R(x) - C(x) = px - cx - c_f = (p - c)x - c_f$$

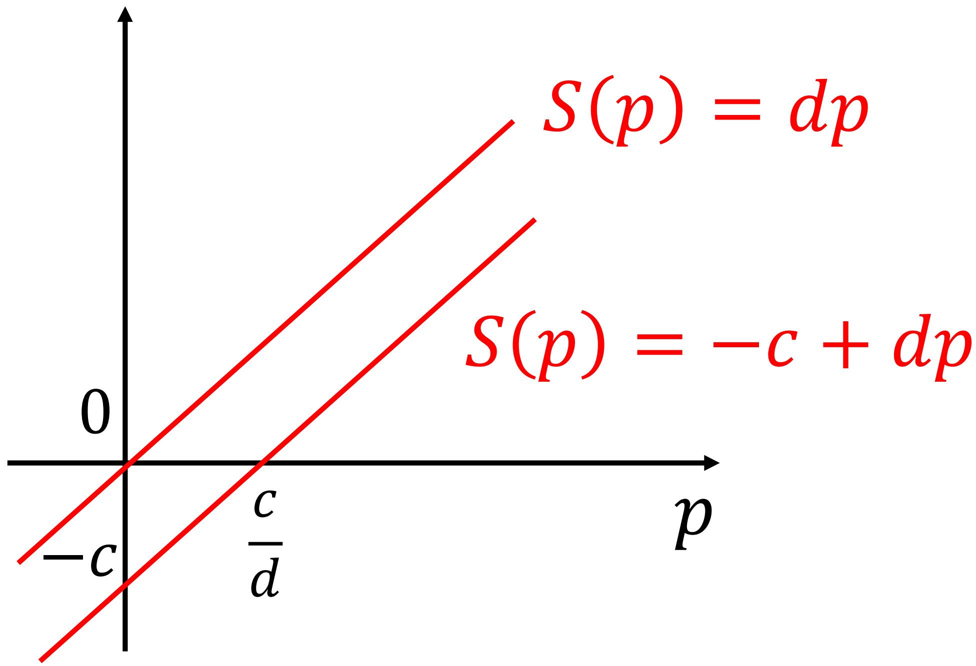
- Funzione di domanda $D(p) = a - bp, p$ prezzo unitario
- Funzione di offerta $S(p) = -c - dp$

funzione di domanda

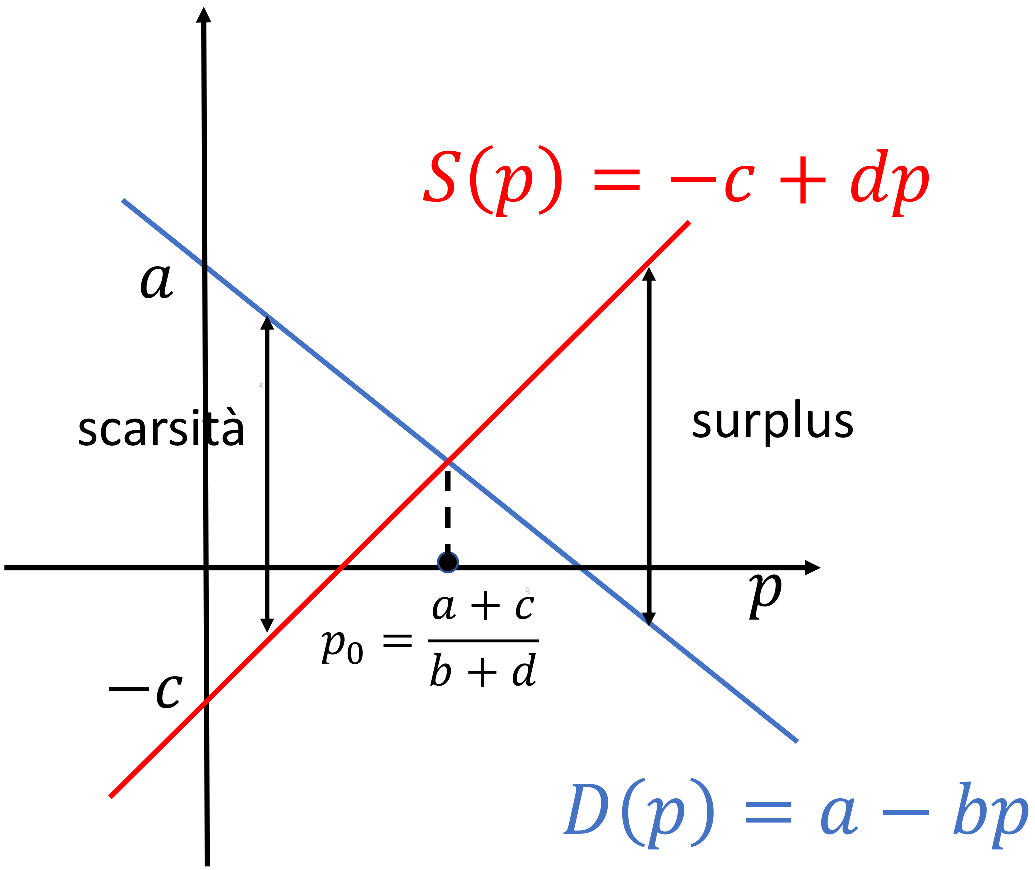


$$D(p) = a - bp\ , a > 0, b > 0$$

funzione di offerta



$$S(p) = -c + dp, c > 0, d > 0$$



Mercato in equilibrio

$$\begin{cases} D(p) = a - bp \\ S(p) = -c + dp \end{cases}$$

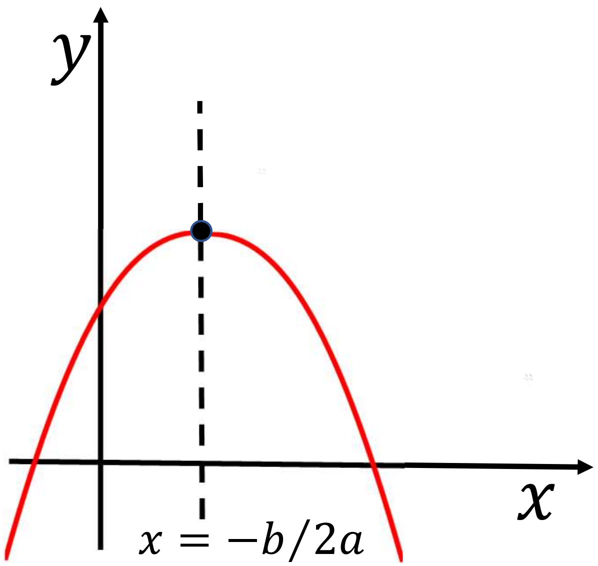
prezzo di equilibrio

$$p_0 = \frac{a+c}{b+d} > 0$$

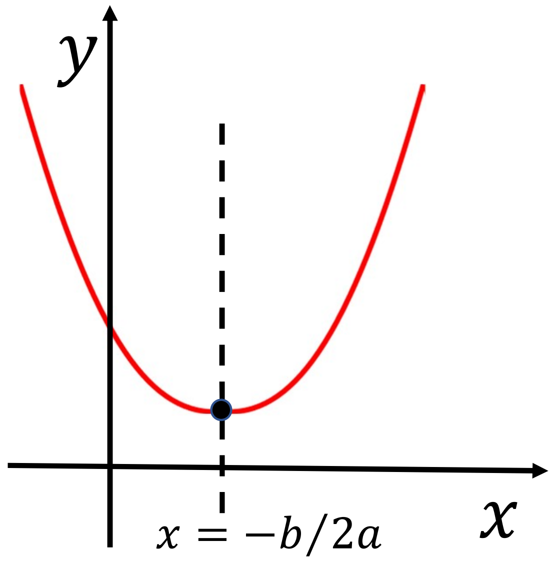
domanda di equilibrio

$$d_0 = S(p_0) = D(p_0)$$

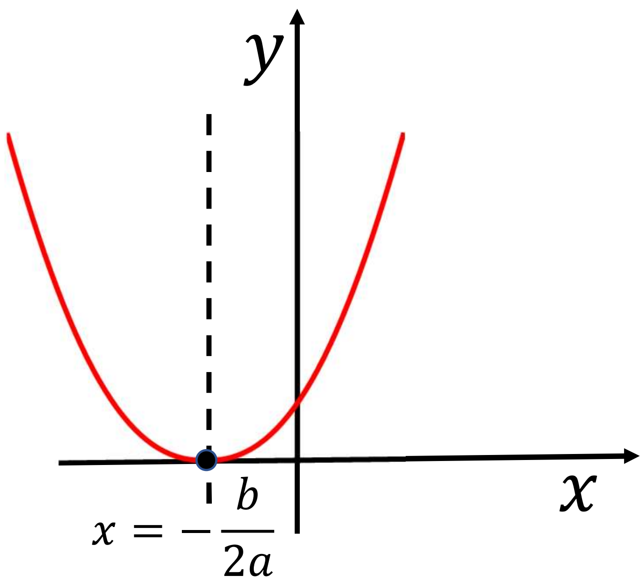
Funzioni quadratiche $f(x) = ax^2 + bx + c$



$a < 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$



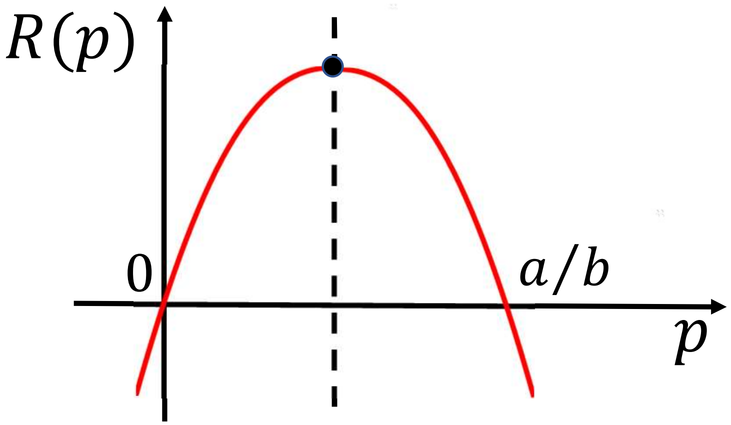
$a > 0, \Delta = b^2 - 4ac < 0$



$a > 0, \Delta = b^2 - 4ac = 0$

- Ricavo = Prezzo × Quantità $R = pq$,

  q *unità vendute* di un determinato bene, p *prezzo unitario*
- Funzione di domanda $q = D(p) = a - bp, a > 0, b > 0$
- Massimizzare il ricavo $R(p) = p(a - bp) = -bp^2 + ap$



$-b < 0,\ \Delta = a^2 > 0$

$$p_0 = \frac{a}{2b}$$

prezzo ottimo

= prezzo che determina il *massimo* ricavo possibile

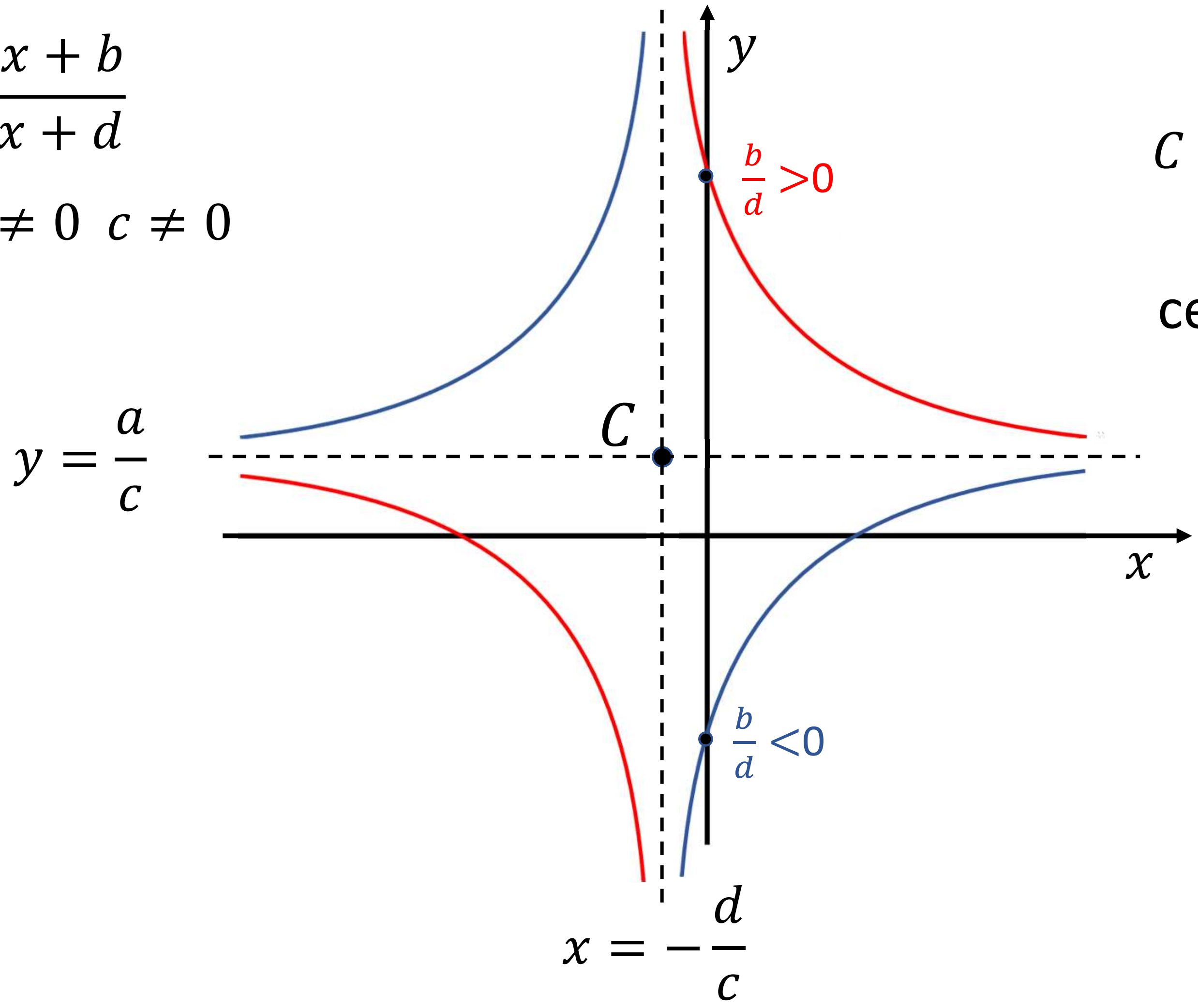
$$R(p_0) = \frac{a}{2b}\left(a - b\frac{a}{2b}\right) = \frac{a^2}{4b}$$

massimo ricavo

Dopo le rette e le parabole: le iperboli

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$ad - cb \neq 0 \quad c \neq 0$$



$$C = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

centro di simmetria

Funzione di *costo medio*

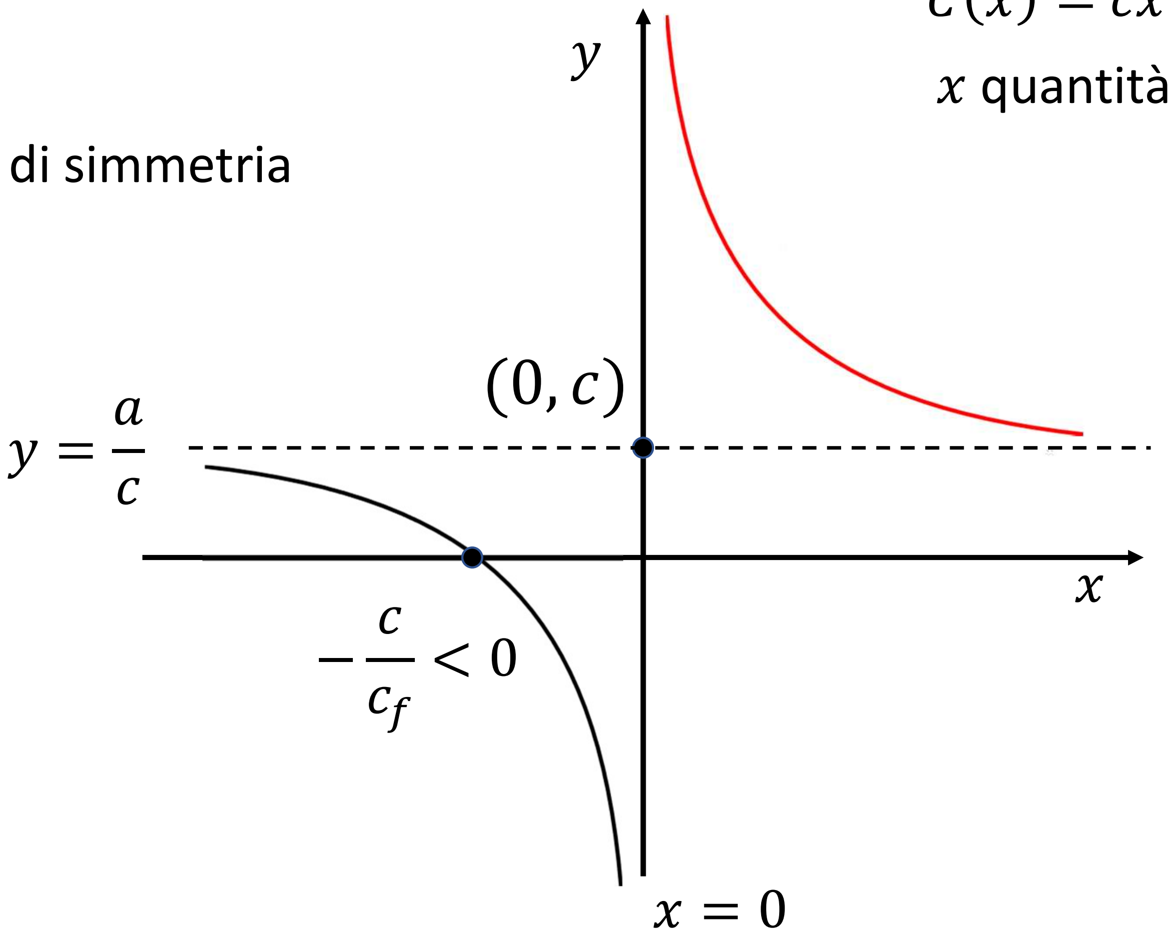
$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{cx + c_f}{x} = c + \frac{c_f}{x}, c > 0, c_f > 0$$

$C(x) = cx + c_f$ costo di produzione

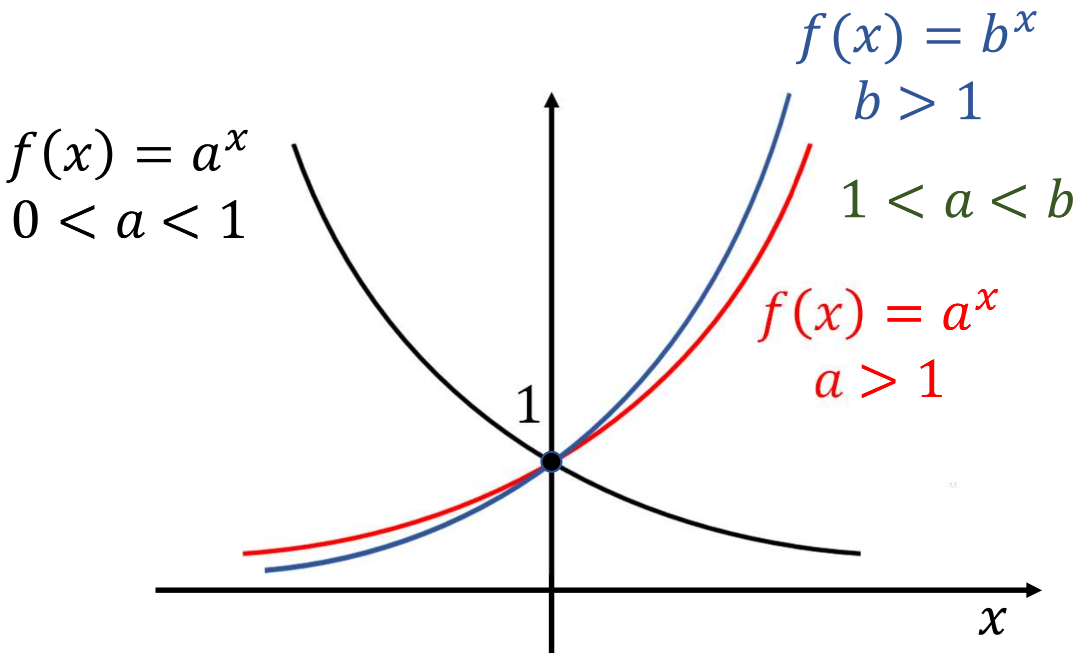
x quantità prodotta (numero di pezzi)

centro di simmetria

$(0, c)$



La funzione esponenziale



Modelli di

- Crescita demografica
- Investimento (capitalizzazione composta)
- Decadimento radioattivo

I due problemi di Eulero

Già Eulero nel 1748 si chiedeva:
Se gli abitanti di una provincia sono 100.000 e aumentano ogni anno di un trentesimo, quanti abitanti avrà questa provincia tra 30 anni? (primo problema di Eulero)

E ancora:
Quanto riscuoterò tra N anni da una persona cui ho prestato 400.000 fiorini e con la quale ho convenuto un interesse del 5% annuo? (secondo problema di Eulero)

Capitalizzazione composta

C_0 capitale iniziale i interesse annuo

capitale dopo 1 anno $C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0\,(1+i)$

capitale dopo 2 anni $C_2 = C_1 + C_1\, i = C_1\,(1+i) = C_0\,(1+i)^2$

capitale dopo 3 anni $C_3 = C_2 + C_2\, i = C_2\,(1+i) = C_0\,(1+i)^3$

. .

. .

capitale dopo n anni $C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i = C_{n-1}\,(1+i) = C_0\,(1+i)^n$

n all'esponente è la variabile indipendente.

Il modello di capitalizzazione composta è a crescita *esponenziale*.

Capitalizzazione continua $\longrightarrow$ il numero e

dopo 1 anno $\quad C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0\,(1+i)$, $\quad C_0$ capitale iniziale, i interesse annuo

- se il calcolo degli interessi avvenisse semestralmente

$$\begin{cases} \text{dopo 6 mesi} \quad C = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right) \\ \text{dopo 1 anno} \quad C = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 \end{cases}$$

.
.

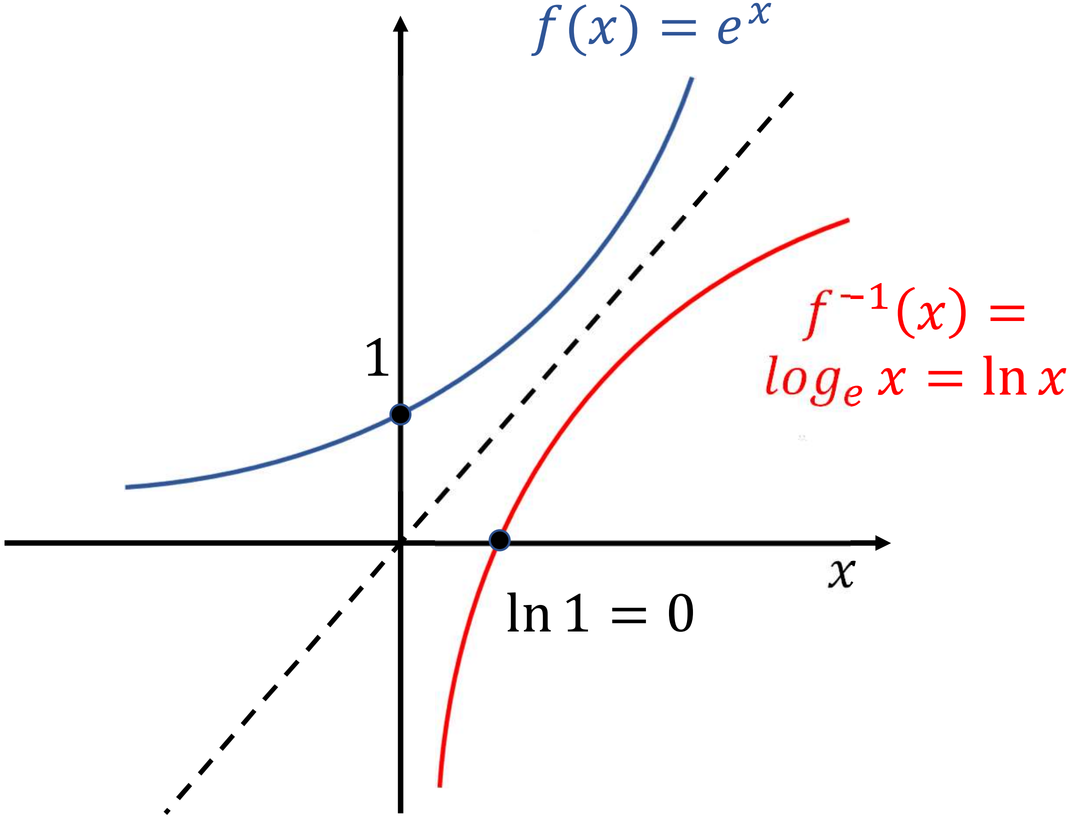
- se il calcolo avvenisse n volte in 1 anno, dopo 1 anno

$$C = C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$$

- se il calcolo avviene in modo continuo, ovvero con $n \to +\infty$,

$$C = \lim_{n\to+\infty} C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = C_0 \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = C_0 e^i\,, \quad \text{in quanto } e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

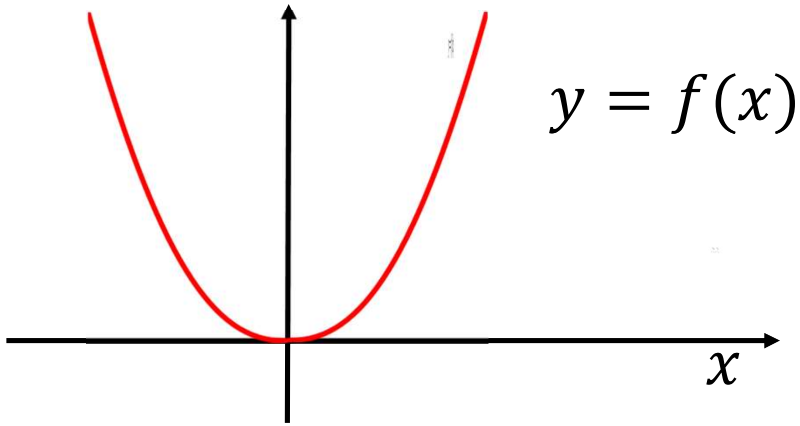
Funzione esponenziale naturale e funzione logaritmo naturale



$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = 2{,}718281828459045$$
$$e > 1$$

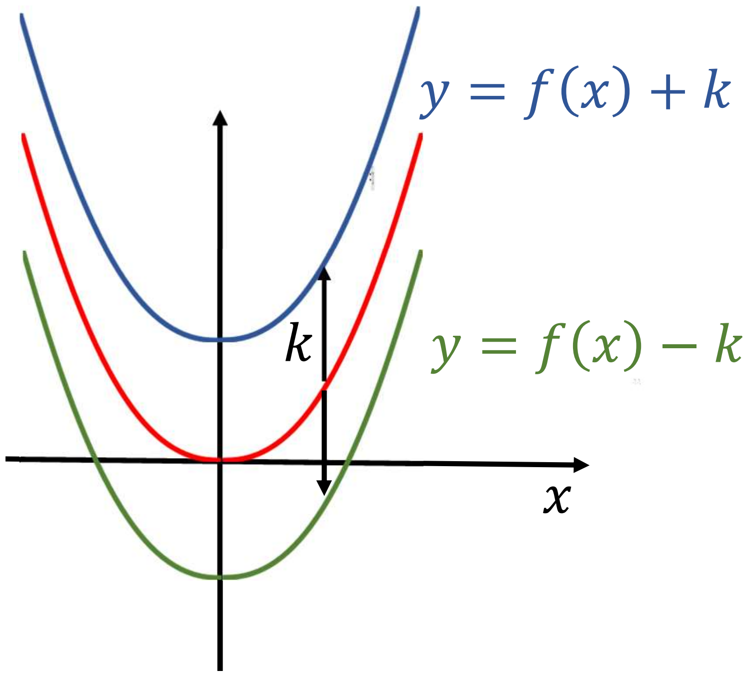
Spostare i grafici

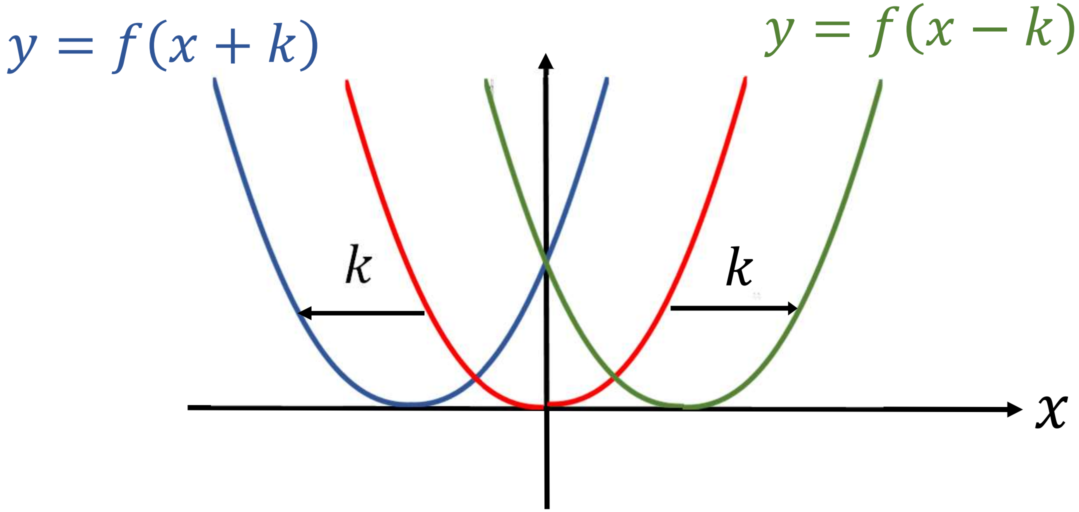


$k > 0$

$y = f(x) \pm k$

$y = f(x \pm k)$





$k > 0$

$$T = f(y)$$

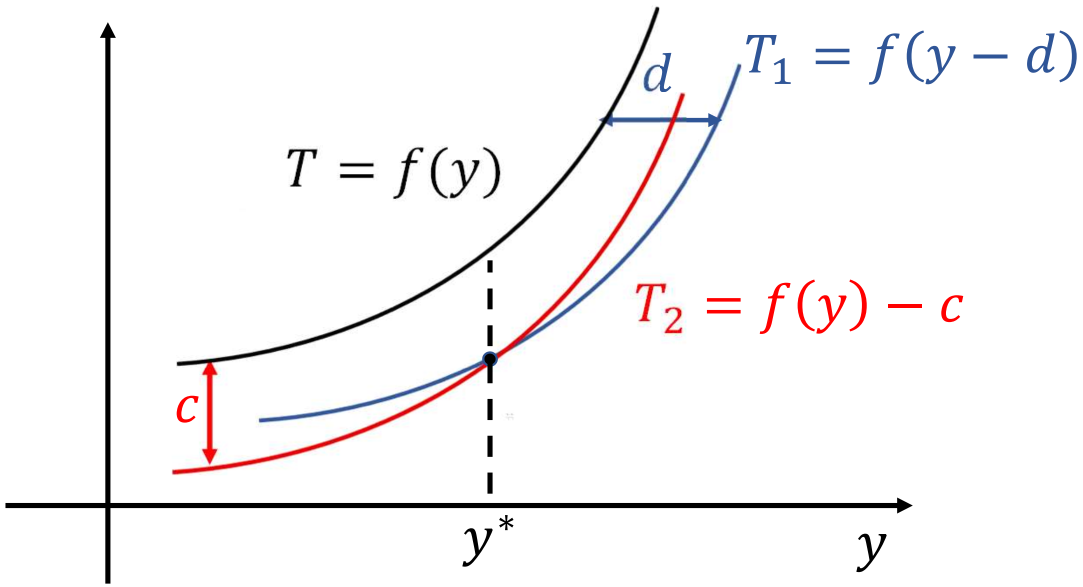
Se un soggetto guadagna y euro allora paga $f(y)$ euro di imposte sul reddito annuo y. Il governo decide di ridurre le imposte.

Proposta 1: dedurre d euro dal proprio reddito tassabile prima che l'imposta sia calcolata.

$$T_1 = f(y - d)$$

Proposta 2: calcolare l'imposta sull'intero ammontare del reddito e istituire un credito di imposta di c euro da utilizzare in compensazione dell'imposta dovuta.

$$T_2 = f(y) - c$$



$T = f(y)$

funzione crescente di y

y^* tale che

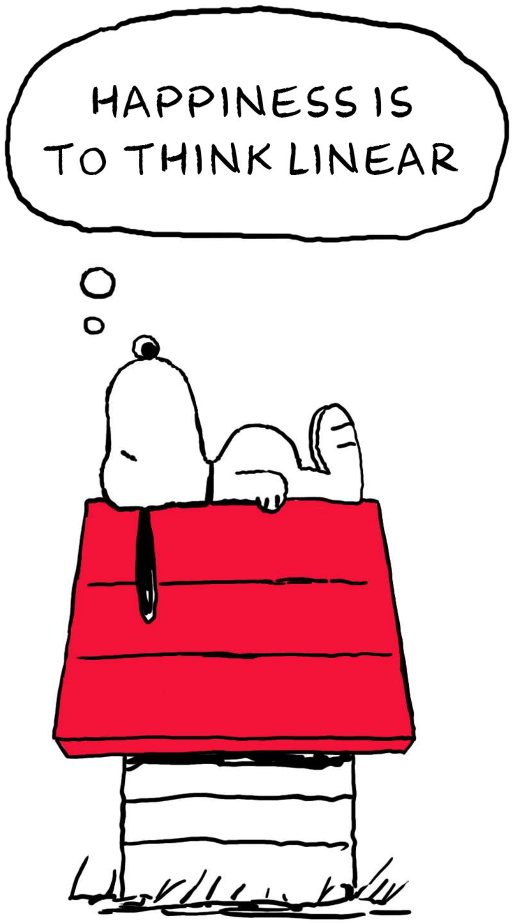
$f(y - d) = f(y) - c$

è il reddito che comporta il pagamento della stessa imposta

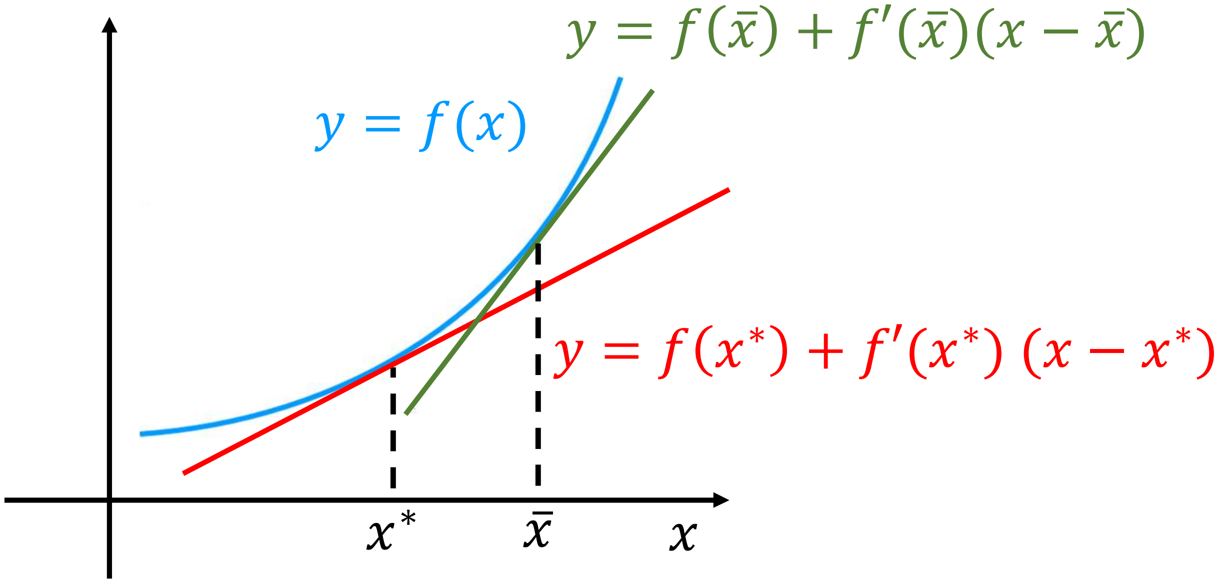
se $y < y^*$ allora $T_2 < T_1$ il credito di imposta è migliore per i redditi bassi

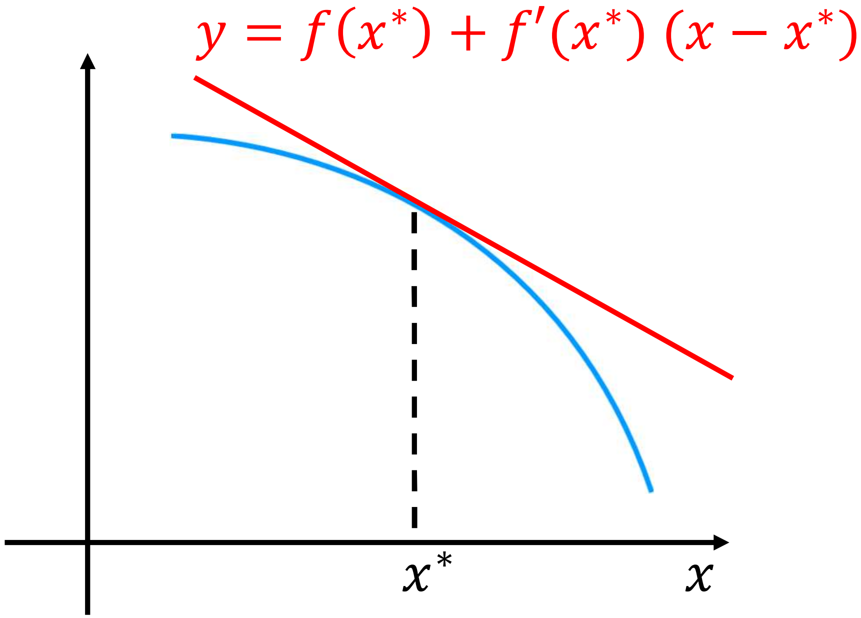
se $y > y^*$ allora $T_2 > T_1$ la deduzione è migliore per i redditi alti

Happiness is to think linear



Approssimazione lineare di funzioni





$\forall x, x \mapsto f'(x)$ *funzione derivata di* f

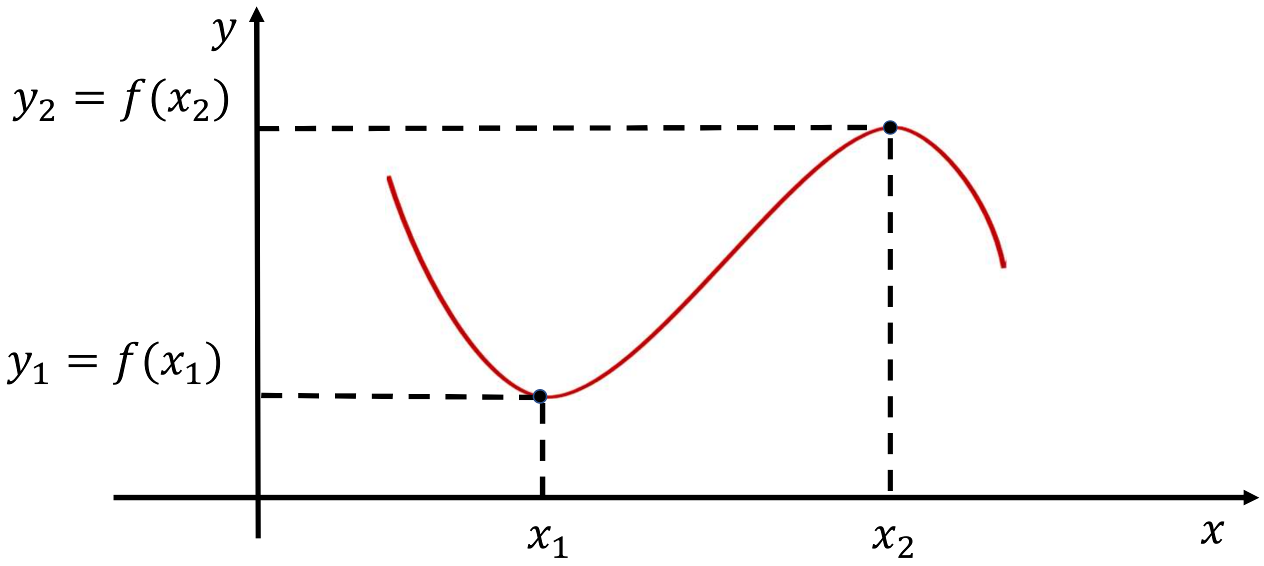
$f'(x) \geq 0$ se e solo se f *crescente*

se $f'(x) > 0$ allora f *strett. crescente*

$f'(x) \leq 0$ se e solo se f *decrescente*

se $f'(x) < 0$ allora f *strett. decrescente*

Ottimizzazione: punti di massimo e di minimo

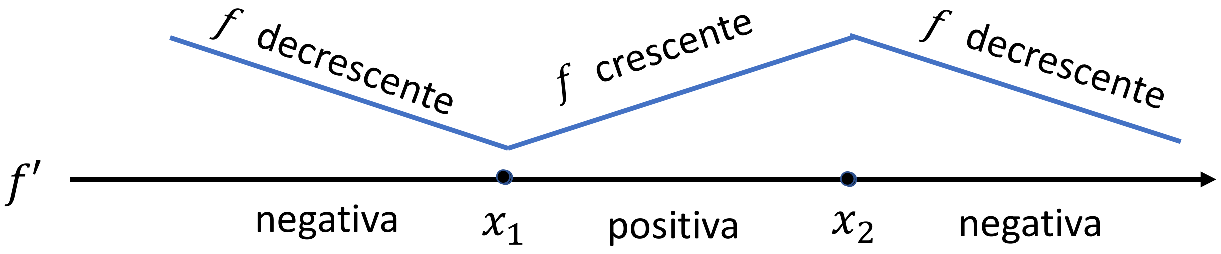


$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

x_1 e x_2 punti critici o punti stazionari

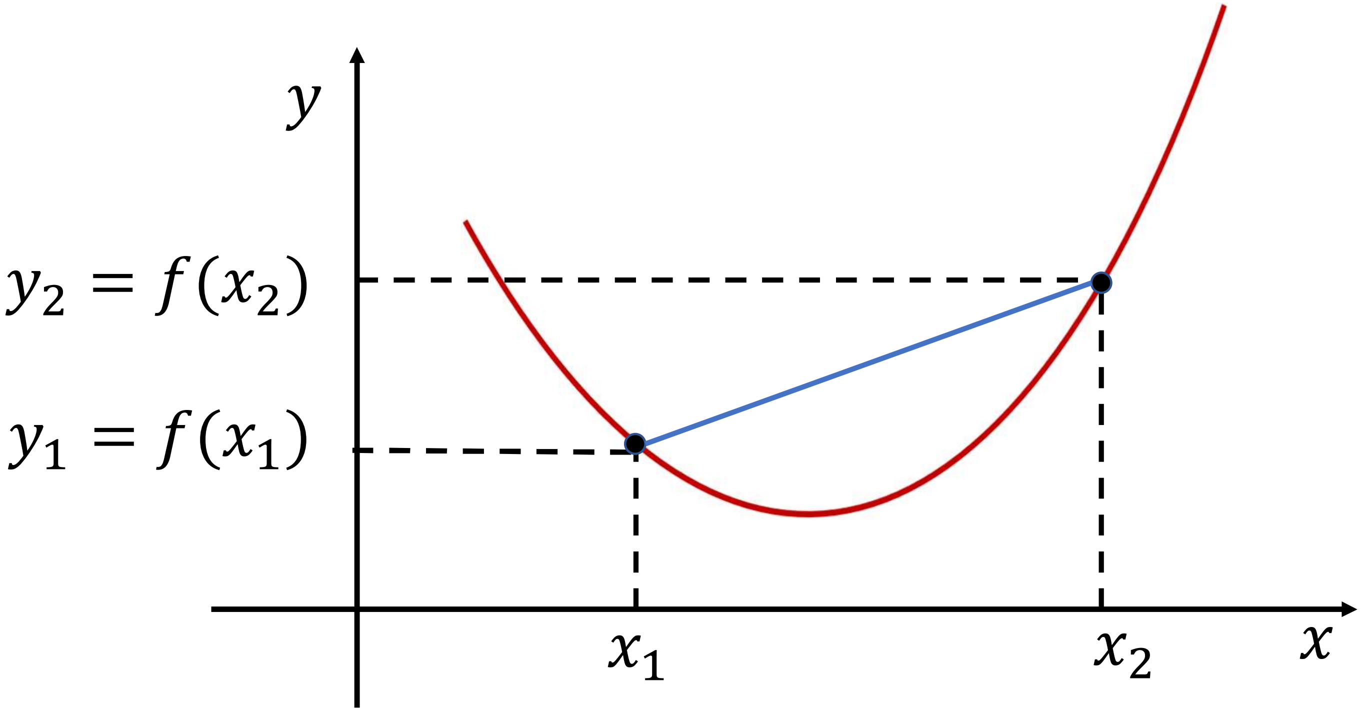
x_1 punto di minimo

x_2 punto di massimo



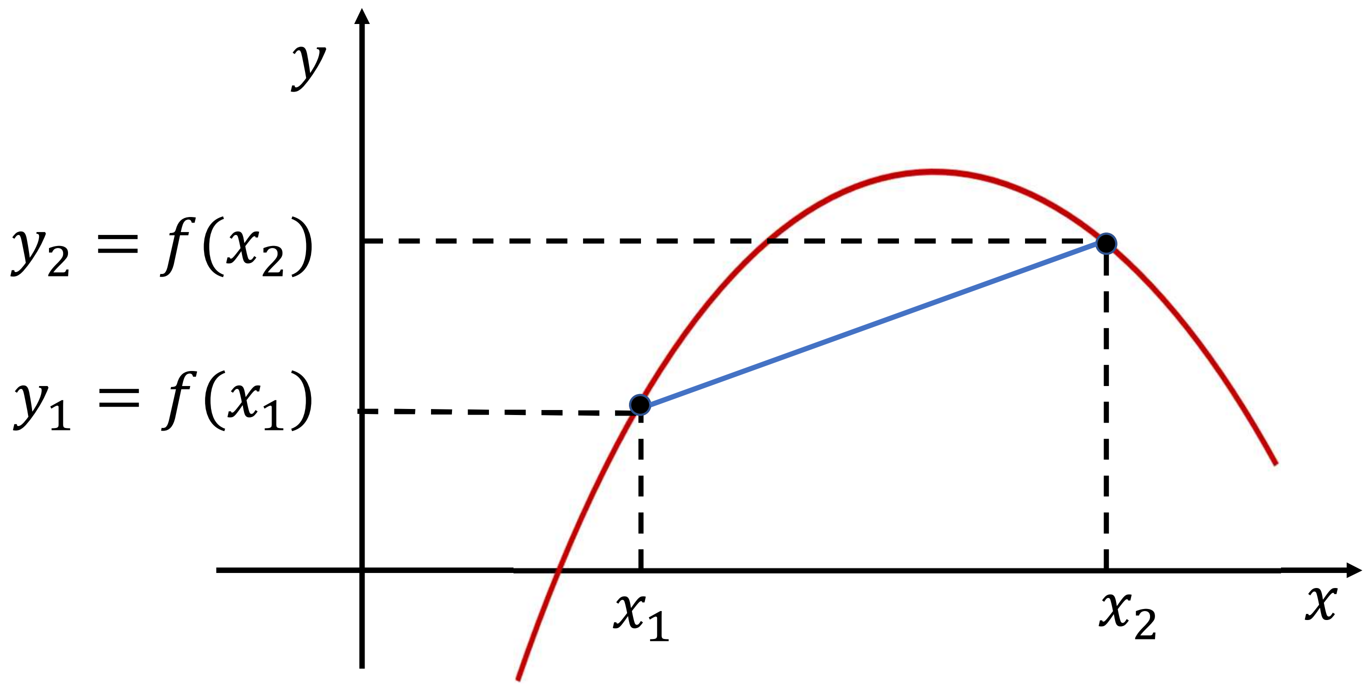
Funzioni convesse e concave

Def. La funzione $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ è detta *convessa* quando $\forall\, x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sta al di sopra (non al di sotto) del grafico di f.

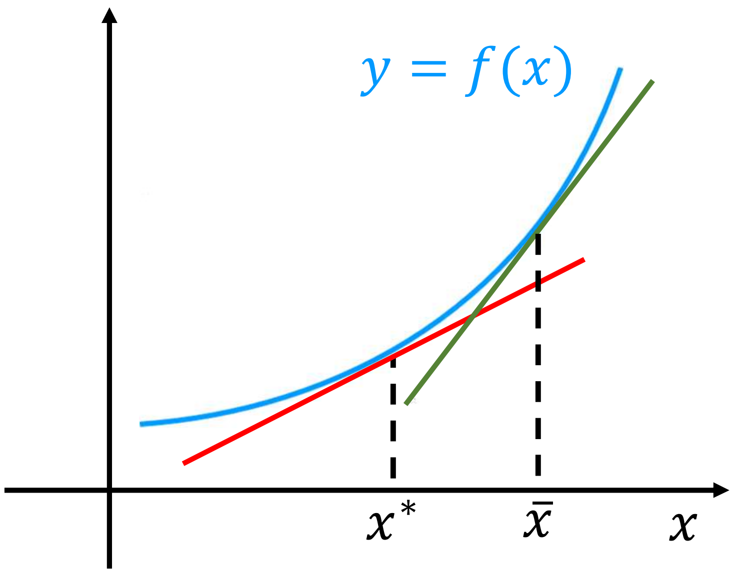


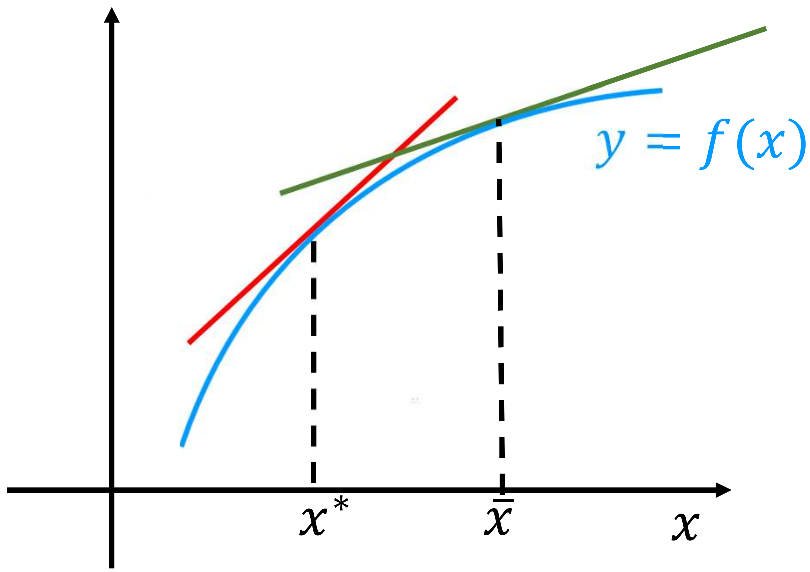
Funzioni convesse e concave

Def. La funzione $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ è detta *concava* quando $\forall\ x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sta al di sotto (non al di sopra) del grafico di f.



Funzioni convesse e concave





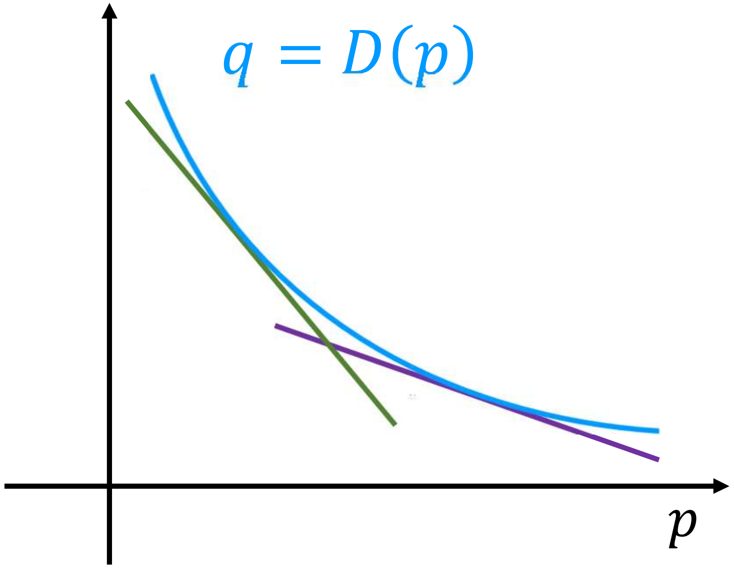
1. f crescente con f' crescente

$$\boxed{f \textit{ convessa} \Leftrightarrow f' \text{crescente} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0}$$

2. f crescente con f' decrescente

$$\boxed{f \textit{ concava} \Leftrightarrow f' \text{decrescente} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0}$$

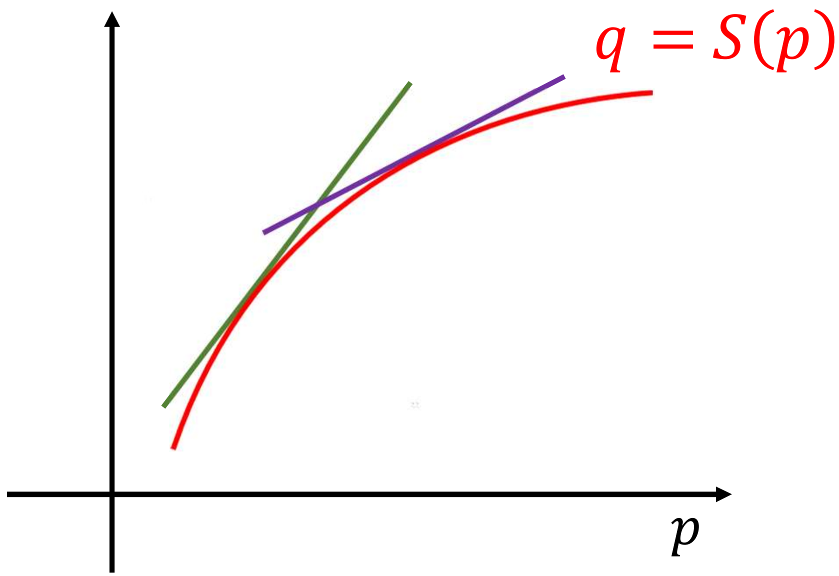
Funzione di domanda



funzione decrescente ($D'(p) < 0$)
e convessa ($D''(p) > 0$)

Se p aumenta la domanda diminuisce
a tasso crescente

Funzione di offerta



funzione crescente ($S'(p) > 0$)
e concava ($S''(p) < 0$)

Se p aumenta l’offerta aumenta
a tasso decrescente

Ottimizzazione: punti di massimo e di minimo

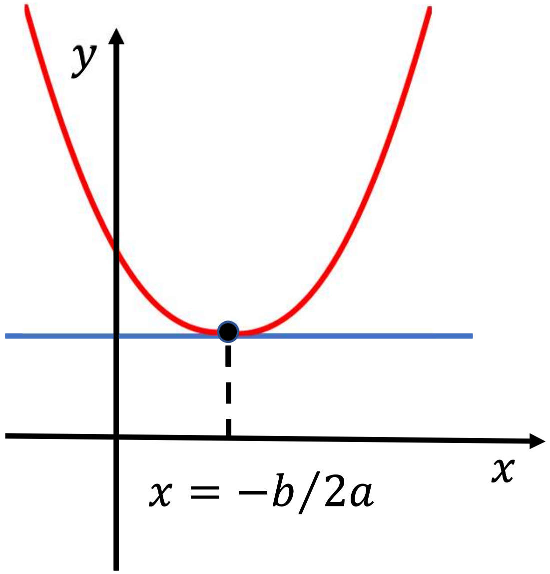
Condizione **necessaria** del **primo** ordine:
se $\bar{x}$ è punto di massimo o di minimo allora $f'(\bar{x}) = 0$

DEF. $\bar{x}$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$ è detto punto stazionario

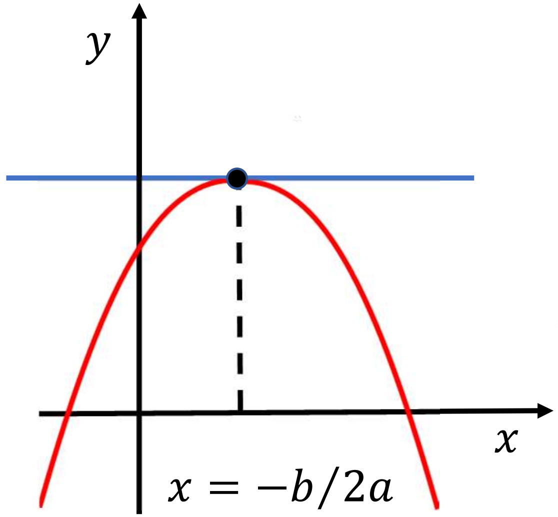
Condizione **sufficiente** del **secondo** ordine:
sia $\bar{x}$ un punto stazionario, allora:
se $f''(\bar{x}) > 0$ allora $\bar{x}$ è punto di minimo
se $f''(\bar{x}) < 0$ allora $\bar{x}$ è punto di massimo

Sia f *convessa* ($\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$); se $\bar{x}$ è punto stazionario allora $\bar{x}$ è punto di minimo (globale)

Sia f *concava* ($\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$); se $\bar{x}$ è punto stazionario allora $\bar{x}$ è punto di massimo (globale)

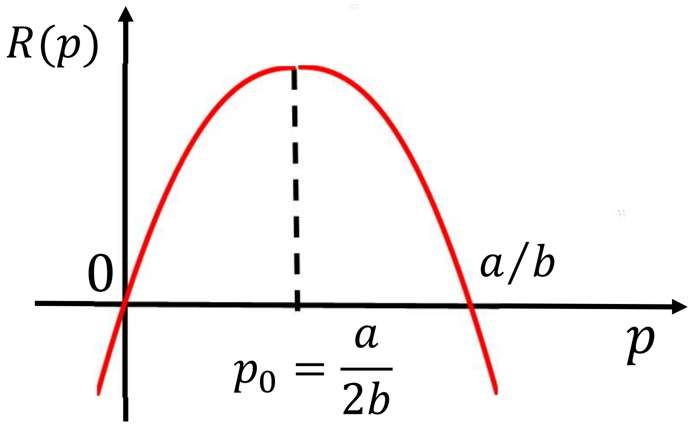


parabola convessa



parabola concava

- Ricavo = Prezzo × Quantità $R(q) = pq, p \geq 0$ e $q \geq 0$
- Funzione di domanda $q = a - bp, a > 0, b > 0$
- Massimizzare il ricavo $R(p) = p(a - bp) = -bp^2 + ap$, con $q = a - bp \geq 0$
- $R'(p) = -2bp + a = 0 \Leftrightarrow p = \frac{a}{2b} \Rightarrow \; p_0 = \frac{a}{2b}$ *punto stazionario*
- $R"(p) = -2b < 0 \Leftrightarrow R(p)$ *funzione concava* $\Rightarrow \; p_0 = \frac{a}{2b}$ *punto di massimo*



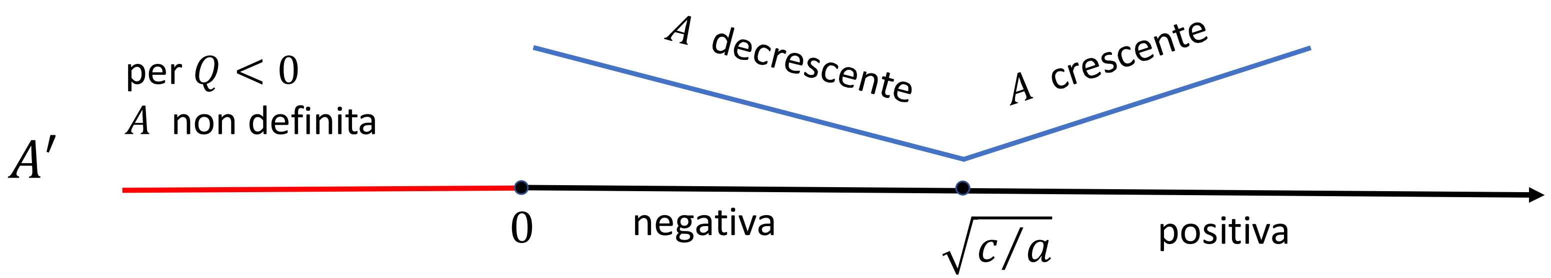
$0 \leq p \leq a/b$

$p_0 = \frac{a}{2b}$ *prezzo ottimo*
= prezzo che determina il *massimo* ricavo possibile

$$R(p_0) = \frac{a}{2b}\left(a - b\frac{a}{2b}\right) = \frac{a^2}{4b}$$

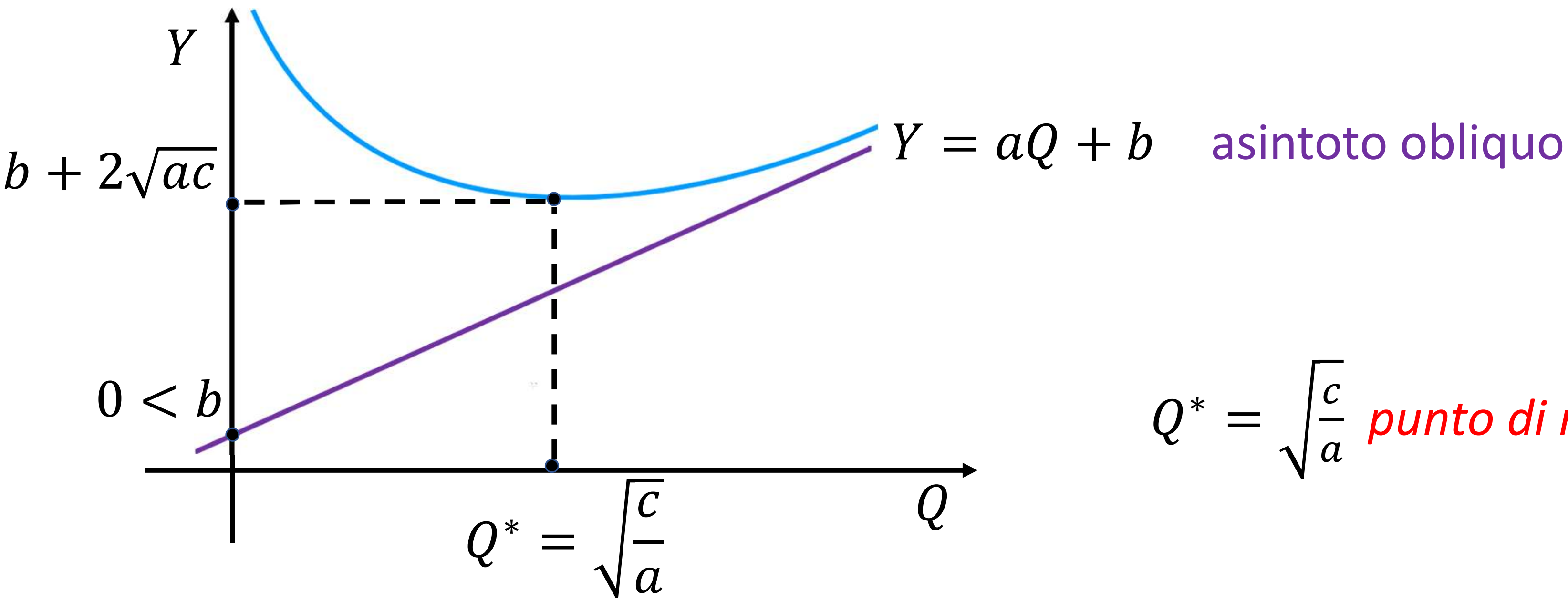
massimo ricavo

- Costo totale di produzione $C(Q) = \mathrm{a}Q^2 + bQ + c, \quad a, b, c > 0$
- Minimizzare il costo medio $A(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = aQ + b + \frac{c}{Q}, \; Q > 0$
- $A'(Q) = a - \frac{c}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow Q = \pm\sqrt{c/a}$
- $A'(Q) = a - \frac{c}{Q^2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{c}{Q^2} \Leftrightarrow Q^2 \geq \frac{c}{a} \Leftrightarrow Q \leq -\sqrt{c/a} \vee Q \geq \sqrt{c/a}$



$Q^* = \sqrt{\frac{c}{a}} > 0$ *punto stazionario (di minimo)*

- $A''(Q) = \frac{2c}{Q^3} > 0\ ,\forall Q > 0 \Leftrightarrow A(Q)$ *funzione convessa* $\Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{c}{a}}$ *punto di minimo*

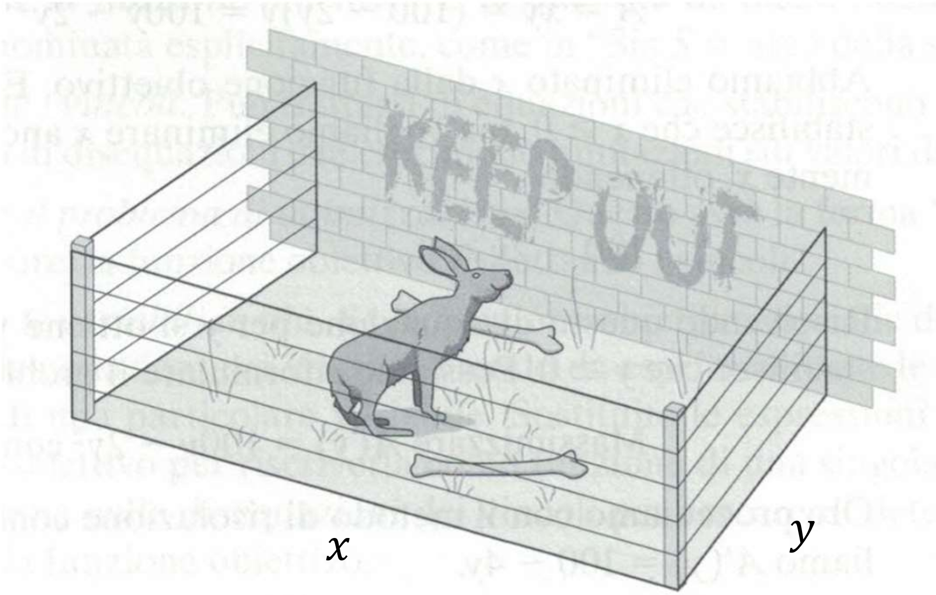


$Q^* = \sqrt{\frac{c}{a}}$ *punto di minimo*

costo medio minimo $A(Q^*) = b + 2\sqrt{ac}$

Un problema isoperimetrico

Costruire, lungo il lato della casa, un recinto rettangolare, come in figura, avendo a disposizione 100 metri di rete, in modo da ottenere l’area più vasta possibile.



- *Incognite* dimensioni del recinto: x, y
- *Obiettivo* massimizzare l’area: $\max(xy)$
- *Vincoli* 100 metri di rete: $x + 2y = 100$
  lunghezze positive: $x \geq 0, y \geq 0$

Problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{cases} \max A(x,y) = xy \\ x + 2y = 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$A(x, y)$ *funzione obiettivo*
(di due variabili)

$$\begin{cases} \max A(x,y) = xy \\ x + 2y = 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

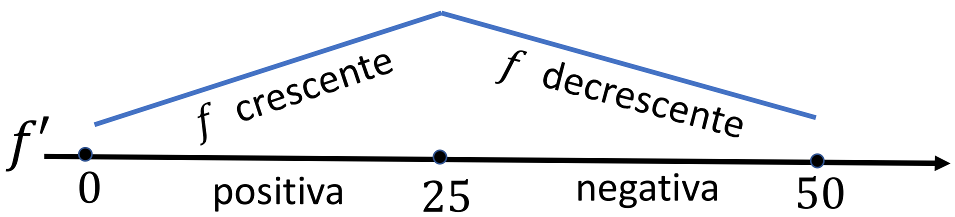
$$x + 2y = 100 \Leftrightarrow x = 100 - 2y$$

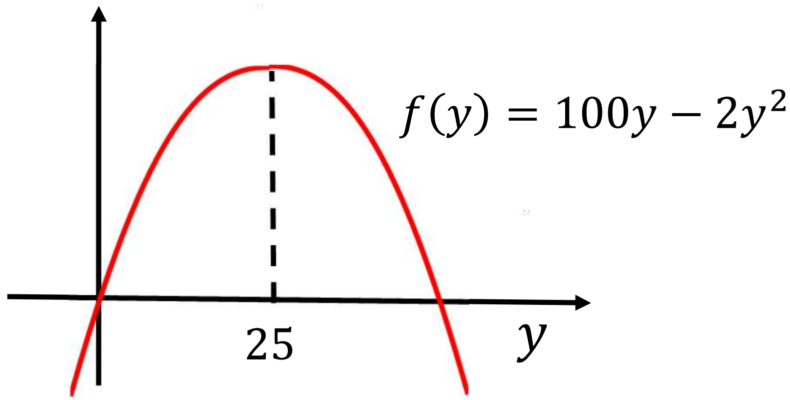
$$x \geq 0 \Leftrightarrow x = 100 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 50$$

$$\begin{cases} \max f(y) = 100y - 2y^2 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases}$$

Problema di ottimizzazione vincolata in una variabile

$$f'(y) = 100 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 25$$





$y = 25$ *punto di massimo* di f $\quad x = 100 - 2y = 50$

$A(50{,}25) = 50 \times 25 = 1250$ *valore massimo dell'area*

Bibliografia

- Guerraggio Angelo, ***Matematica***, Pearson Italia, 2020.
- Sydsæter Knut, Hammond Peter, Strøm Arne, Carvajal Andrés, ***Metodi matematici per l’economia***, Pearson Italia, 2021.
- Waner Stefan, Costenable Steven R., ***Strumenti quantitativi per la gestione aziendale***, Apogeo Education, Maggioli Editore, 2018.