Per una storia del concetto di funzione dall'antichità ai giorni nostri

Alberto Cogliati

Università degli Studi di Pisa

12 Settembre, 2022 Lucca, 39^o Convegno sulla didattica della matematica

Cominciamo dalla definizione odierna

> *Siano E e F due insiemi, non necessariamente distinti. Una relazione fra un elemento variabile x di E e un elemento variabile y di F è detta relazione funzionale in y, se, per ogni $x \in E$, esiste un unico $y \in F$ che è nella data relazione con x.*
> *Diamo il nome di funzione all'operazione che associa in questo modo ad ogni elemento $x \in E$ l'elemento $y \in F$ che è nella data relazione con x. (Bourbaki, 1968)*

Una funzione altro non è che un opportuno sottoinsieme R del prodotto cartesiano $E \times F$, tale cioè che se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$ con $x_1 = x_2$, deve essere necessariamente $y_1 = y_2$.

Il frutto di una plurisecolare sedimentazione

- La nozione di funzione emerge a partire dal XVII secolo, in concomitanza con la nascita e lo sviluppo del calcolo infinitesimale.

Si tratta, come spesso accade, di una semplificazione che non rende giustizia della complessità della storia che ha portato, attraverso una plurisecolare processo di sedimentazione, alla nozione espressa dalla precedente definizione che ritroviamo in Bourbaki.

La *vulgata* in breve

- La nozione di funzione emerge a partire dal XVII secolo, in concomitanza con la nascita e lo sviluppo del calcolo infinitesimale.
- Una prima definizione del concetto si ha con Euler (1748), il quale definisce una funzione come il dato di una espressione analitica.

Si tratta, come spesso accade, di una semplificazione che non rende giustizia della complessità della storia che ha portato, attraverso una plurisecolare processo di sedimentazione, alla nozione espressa dalla precedente definizione che ritroviamo in Bourbaki.

- La nozione di funzione emerge a partire dal XVII secolo, in concomitanza con la nascita e lo sviluppo del calcolo infinitesimale.
- Una prima definizione del concetto si ha con Euler (1748), il quale definisce una funzione come il dato di una espressione analitica.
- Per un secolo (circa) tale definizione riveste un ruolo dominante, almeno fino a quando Lobachevskii (1834) e Dirichlet (1837), propongono una definizione nella sostanza coincidente con l'idea di una legge di corrispondenza qualunque che associa a un valore assegnato della variabile indipendente un *unico* valore della variabile dipendente.

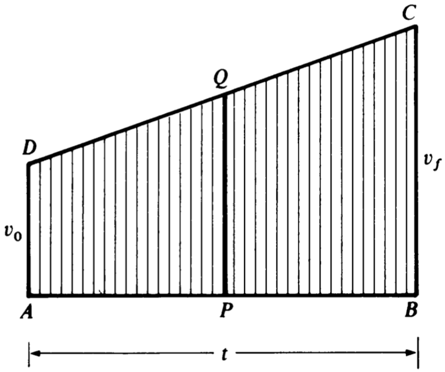
Si tratta, come spesso accade, di una semplificazione che non rende giustizia della complessità della storia che ha portato, attraverso una plurisecolare processo di sedimentazione, alla nozione espressa dalla precedente definizione che ritroviamo in Bourbaki.

Una storia che comincia da lontano...

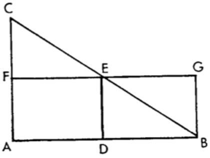
- Antichità: vago impiego di una nozione di relazione funzionale può essere rintracciato ad esempio in Apollonio nella caratterizzazione delle coniche attraverso il loro "sintomo" o nelle tavole ad uso astronomico che si trovano nell'*Almagesto* di Tolomeo, che contengono ad esempio i valori di certe funzioni razionali o semplici funzioni irrazionali dei seni di un arco.
- Medioevo: rappresentazione della dipendenza di alcune "qualità" rispetto al tempo e al luogo da parte di filosofi scolastici come il francese Nicole d'Oresme: la cosiddetta "latitudine delle forme".

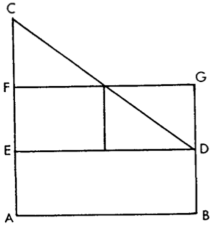
Nicola d'Oresme, 1323-1382

Rappresentazione della variazione della velocità. Velocità è una qualità, cioè un attributo che ammette una intensità. Qualità intensive sono distinte dalle corrispondenti quantità estensive: la distanza percorsa o il tempo. In figura, le linee verticali sono le latitudini, cioè i gradi della intensità, che sono tracciate perpendicolarmente rispetto alla linea delle "longitudini", i segmenti della quale rappresentano la corrispondente "estensione", ad esempio il tempo.



Omnis qualitas, si fuerit uniformiter difformis, ipsa est tanta quanta foret qualitas eiusdem subiecti vel equalis uniformis secundum gradum puncti medii eiusdem subiecti; et hoc intelligo si qualitas fuerit linearis.





Ciò consente ad esempio di ricavare lo spazio percorso in un moto uniformemente accelerato (*uniformiter difformis*) come segue:

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)t$$

Un'innovazione cruciale

L'introduzione dell'algebra simbolica da parte di François Viète e il suo impiego nel contesto della geometria analitica di Fermat e Descartes furono tappe essenziali nella costruzione del concetto di funzione:

- Il linguaggio simbolico consente di rappresentare efficacemente il concetto di variabilità per grandezze indeterminate

L'introduzione dell'algebra simbolica da parte di François Viète e il suo impiego nel contesto della geometria analitica di Fermat e Descartes furono tappe essenziali nella costruzione del concetto di funzione:

- Il linguaggio simbolico consente di rappresentare efficacemente il concetto di variabilità per grandezze indeterminate
- Primi esempi più o meno espliciti di relazione funzionale per segmenti di misura variabile:
  Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, sit locus et terminus alterius ex illis describet lineam rectam aut curvam, Fermat, *Ad locos planos*, ante 1637;
  Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe démandée, Descartes, *Géométrie*, 1637.

W. G. Leibniz (1646-1716)

La prima attestazione (in un contesto matematico) del termine *functio, -nis* pare essere in un manoscritto del 1673 di Leibniz che reca il titolo *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* contenuto in *DE FUNCTIONIBUS PLAGULAE QUATTUOR*, Agosto 1673. Qui Leibniz affronta dapprima il cosiddetto problema diretto per curve "geometriche" e "non-geometriche" (come la cicloide) osservando che:

> *Esto figura curvilinea ABCDA in qua relatio applicatae ED ad abscissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur: id enim utique necesse est, si modo figurae natura nobis nota est. (***Si consideri una figura curvilinea** *ABCDA* **nella quale la relazione dell'applicata** *ED* **con l'ascissa** *AE* **è data da una certa equazione a noi nota: ciò in ogni caso avviene necessariamente soltanto se la natura della figura ci è nota.***)*

Quindi, Leibniz affronta il problema inverso che consiste nel determinare le ordinate a partire dalle proprietà delle tangenti o di qualche altro genere di linea che svolge una certa funzione rispetto alla curva:

> *Unde notari potest, quoties ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis, applicatae quaeruntur, unam semper applicatam ponendam velut assumtam, et sequentem velut quaesitam.* **[...] ogni qualvolta a partire da altri tipi di linee che nella figura data svolgono certe funzioni [...].**

Leibniz non usa ancora la parola funzione per indicare una relazione fra variabili. Come prova la prima delle citazioni precedenti, egli dispone di una qualche nozione di funzione (nel senso usuale del termine) e lo indica con il vocabolo *relatio*.

Nella seconda citazione, il termine *functio* non ha assunto il significato matematico odierno, ma quello che le associamo nel linguaggio della vita reale; significa quindi qualcosa come il "ruolo" che un membro di un organo o una parte di una macchina deve svolgere, il suo compito, la sua posizione o il suo modo di operare. "In figura functionem facere" significa, ad esempio: toccare la curva, stare perpendicolarmente ad essa, formarne la subtangente o subnormale, ecc..

Johann Bernoulli (1667-1748)

Figure: Ritratto di J. R. Rudolf, 1740 circa.

In una lettera a Leibniz del 2 Settembre 1694, Bernoulli comunica a Leibniz il seguente sviluppo in serie [la notazione è leggermente modificata]:

$$\int ndz = nz - \frac{1}{1\times 2} z \cdot z \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1\times 2\times 3} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \dots$$

e osserva: *per n intelligo quantitatem quomodocunque formata ex indeterminatis et costantibus (***Intendo con** n **una quantità formata in un modo qualunque da indeterminate e costanti.***)* .

Il primo impiego in un testo a stampa del termine funzione in un senso vicino a quello odierno ritroviamo nel seguente lavoro di Bernoulli: *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des probèmes sur les isopérimètres*, 1718.

> *Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.* **Si chiama funzione di una grandeza variabile una quantità composta in un modo quale che sia da questa grandezza variabile e da costanti**.

Qui Bernoulli introduce il simbolo ϕ, per denotare la "caractéristique" (l'espressione è dovuta a Leibniz) di una funzione, scrivendo ϕx.

Leonhard Euler (1707-1783)

Figure: Ritratto di J. E. Handmann

Nel primo capitolo della sua *Introductio in analysin infinitorum*, troviamo le seguenti definizioni:

> *Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur.* **Una quantità variabile è una quantità indeterminata o universale che abbraccia in sè tutti i valori**.
>
> *Quantitas ergo variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam irrationales et transcendentes. Quin etiam cyphra et numeri imaginarii a significatu quantitatis varabiabilis non excluditur. [. . .]*
>
> *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.* **Una funzione di una quantità variabile è una espressione analitica composta in modo qualsivoglia da quella quantità variabile e da numeri, cioè da costanti**.

Che cosa intende Euler con le parole "expressio analytica"?
In primo luogo serie di potenze intere positive del tipo:

$$A + Bz + Cz^2 + \ldots.$$

A questo proposito, sospettando che qualcuno potesse opporre perplessità sulla possibilità di rappresentare in tal modo una qualunque funzione, Euler precisa:

> *si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cuisque functionis tolletur.*

In realtà, questa interpretazione appare a Euler sin troppo restrittiva. Ammette così che gli sviluppi contengano esponenti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qualunque:

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \ldots.$$

Sul finire del 1746 J. Le Rond D'Alembert conclude una memoria (pubblicata nel 1747, in *Hist. Acad. Sci. Berlin*, 3, 214-219) dal titolo "Ricerche sulla curva che descrive una corda tesa posta in vibrazione".
"In questa memoria mi propongo di dimostrare che esistono infinite curve distinte dalla *Compagne de la Cycloide allongée* [il grafico della funzione seno] che soddisfano al problema di cui si tratta."
Il problema consiste nel descrivere il moto di vibrazione di una corda tesa, e cioè nel trovare una "funzione incognita" $y(t,x)$ che descrive il profilo della corda come funzione di x al variare del tempo.
Nella prima parte della memoria D'Alembert ricava una condizione differenziale che è traducibile nella seguente forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Occorre notare però che l'originaria formulazione non contempla l'uso di derivate parziali ma soltanto l'impiego di differenziali, secondo la consuetudine del calcolo leibniziano. In accordo con tale concezione, la curva veniva concepita come una poligonale costituita da infiniti lati di lunghezza infinitesima ($ds = (dx, dy)$).

Mediante un cambiamento di unità di misura, tale equazione è riscritta così:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Poiché in generale vale:

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x} \pm \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}(dt \pm dx) \pm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt.$$

Tenendo conto di (1), si ha che $\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial x}$ sono funzioni rispettivamente di $t + x$ e di $t - x$. Dal che, D'Alembert ricava, integrando:

$$y(x, t) = \Psi(t + x) + \Gamma(t - x). \tag{2}$$

"È agevole vedere che questa equazione include una infinità di curve. Per dimostrarlo consideriamo soltanto un caso particolare, cioè il caso in cui $y = 0$, per $t = 0$."

Imponendo dunque le condizioni

$$y(x,0) = 0, \quad y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad (L \text{ è la lunghezza della corda}),$$

si ottiene: $\Gamma(-x) = -\Psi(x), \Gamma(t) = -\Psi(t)$, che implica la parità delle funzioni Γ e Ψ. Inoltre, si ha che $\Psi(t+L) = \Psi(t-L)$. In altre parole, "occorre trovare una quantità $\Psi(t+x)$ tale che $\Psi(x) - \Psi(-x) = 0$ e $\Psi(t+L) = \Psi(t-L)$". In tal caso la soluzione sarà:

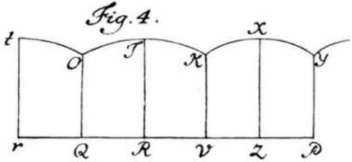
$$y = \Psi(t+x) - \Psi(t-x)$$

Occorre dunque costruire una funzione siffatta. D'Alembert propone il seguente ragionamento di natura geometrica che sarà di lì a poco ripreso da Euler.

IX. Pour y parvenir, imaginons la courbe *t o* T, dont les coordonnées ſoyent T R $=$ *u*, Q R $=$ *z*, & qui ſoyent telles, que *u* $=$ ψ *z*; cela poſé puisque ψ *s* $-$ ψ $-$ *s* doit etre egale à zero, il eſt evident qu'en prenant Q *r* $=$ Q R, il faut que *r t* $=$ R T; & qu'ainſi la courbe *t o* T aura, de part & d'autre du point *o*, des portions ſemblables & egales, *t o*, *o* T. De plus, comme ψ $(t + l)$ doit etre $=$ à ψ $(t - l)$ & que la difference de $t + l$ & de $t - l$ eſt $2l$, il eſt evident que la courbe *t o* T doit etre telle, qu'etant ſuppoſée entierement decrite, deux ordonnées quelconques diſtantes l'une de l'autre de la quantité $2\,l$, ſoyent egales entr'elles. Donc ſi on ſuppoſe Q R $=$ *l*, on verra que la partie T K doit etre egale & ſemblable à *t* O; que la partie K X doit etre auſſy egale & ſemblable à *o* T &c.; & comme les parties *t* O, *o* T, ſont deja ſemblables & egales, il s'enſuit que la courbe cherchée s'etend à l'infini des deux côtés du point *o*, & qu'elle eſt compoſée de parties toutes egales & ſemblables à la partie *o* T K, dont l'abſciſſe Q V $=$ $2\,l$, & qui eſt diviſée

Memoires de l'Academie Tom. III. Ee diviſée

Fig. 4.



218

diviſée par ſon point de milieu T en deux parties ſemblables & égales.

"È facile vedere" che la velocità è data da:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \Psi'(t + x) - \Psi'(t - x).$$

La velocità inziale è allora $V(x) = 2\Psi'(x)$. Cioè, "l'espressione per la velocità iniziale [...] deve essere tale che quando ridotta a una serie essa includa solo potenze dispari di x. Altrimenti [...] il problema sarebbe irresolubile, non si potrebbe assegnare una funzione tale che rappresenti in generale il valore dell'ordinata della curva per ogni ascissa x e ad ogni istante t."

XX. Jusqu'à preſent les caracteres f & φ, dans l'equation

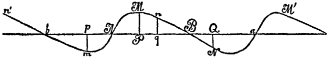
$$y = f: (x + t\sqrt{b}) + \varphi: (x - t\sqrt{b})$$

ſignifient des fonctions quelconques, qui different en raiſon de la compoſition, & leur relation ſe determine davantage par les autres conditions. Car comme en poſant $x = o$, on doit toujours avoir $y = o$, il doit etre $f: (+t\sqrt{b}) + \varphi\ (-t\sqrt{b}) = o$, & par conſequent $\varphi\ (-t\sqrt{b}) = -f: (t\sqrt{b})$. Or alors, parce qu'en poſant $x = a$, la valeur de y doit pareillement evanoüir, on aura auſſi $f: (a + t\sqrt{b}) + \varphi: (a - t\sqrt{b}) = o$; & ainſi la nature des fonctions f & φ doit etre définie de maniere qu'elle ſatisfaſſe à ces conditions.

$$\varphi: -t\sqrt{b} = -f: t\sqrt{b}$$
$$\varphi: (a - t\sqrt{b}) = -f: (a + t\sqrt{b})$$

XXI. Comme $f: z$ peut être repreſenté en général par l'appliquée d'une certaine courbe, dont l'abſciſſe eſt z, ſoit A M B la courbe dont les appliquées P M fourniſſent les fonctions des abſciſſes A P qui ſont déſignées par le caractere $f:$ en ſorte que P M ſoit $= f: t\sqrt{b}$; auquel $\varphi: -t\sqrt{b}$ devant être negativement égal, qu'on prenne A p = A P, de ſorte que A p $= t\sqrt{b}$; & en poſant la courbe Amb au deſſous de l'axe de la courbe ſemblable A M B, on aura pm $= -f: t\sqrt{b} = \varphi: -t\sqrt{b}$. Donc la courbe Amb ſemblable à la courbe AMB expoſera la nature de l'autre fonction φ. Alors la courbe AMB exiſtant d'une maniere ſemblable au delà de B, ſoit AB $= a$ continué au deſſous de l'axe, afin que la portion BNa ſoit ſemblable & égale à la courbe BnA, & en prenant BQ = Bq, on aura AQ $= a + t\sqrt{b}$, QN $= f: (a + t\sqrt{b})$, & pareillement à cauſe de Aq $= a - t\sqrt{b}$, il ſera qn $= f: (a - t\sqrt{b})$ d'où il paroit qu'une courbe de cette forme AMB, qui eſt continuée de part & d'autre à l'infini par des parties ſemblables & égales à elle même Am b, BNa, & qui ſoient ſituées alternativement en haut & en bas, eſt propre à repréſenter la nature de l'une & l'autre fonction f & φ. Fig. 1.

XXII. Ayant

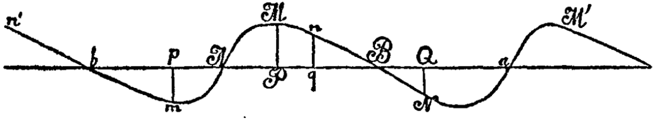


Euler afferma che la soluzione da lui proposta alla equazione delle onde coincide essenzialmente con quella di D'Alembert; tuttavia, egli aggiunge, intende fornire "qualche osservazione molto interessante sull'applicazione delle formule generali". Il profilo iniziale $Y(x) = y(x,0)$ è assunto arbitrario, mentre implicitamente, Euler assume che $v(x) := \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_0 = 0$. Dunque:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t).$$

Mediante una costruzione geometrica elementare Euler mostra come a partire dal profilo iniziale della curva $y = f(x), 0 \leq x \leq L$ sia possibile dedurre la soluzione $y(x,t)$.Infatti, come Euler scrive:
La funzione $y = f(x), 0 \leq x \leq L$ ha un grado di arbitrarietà molto maggiore rispetto a quello concesso da D'Alembert.
La prima vibrazione dipende dall'arbitrio, nella misura in cui alla corda, prima che sia lasciata vibrare, è possibile attribuire una forma qualunque e per questo il moto vibratorio della medesima corda può essere variato in infiniti modi, a seconda che a questa, all'inizio del moto, sia imposta questa o quell'altra forma.

Eulero: *Sur la vibration des cordes (De vibratione cordarum)*



"[...] *se c'è una curva data, o un profilo, che la corda abbia ricevuto all'inizio del moto, si potrà ricavare la determinazione del profilo della corda in un qualunque tempo [...]. Infatti, descriviamo al di sopra dell'asse* $AB = a$*, che è la lunghezza della corda, il profilo iniziale* AMB *e riportiamolo da una parte all'altra in maniera invertita, così che* $Amb = AMB$ *e* $BNa = BnA$ *e immaginiamo la ripetizione continua di questa curva da un parte e dall'altra all'infinito secondo la medesima legge. Allora, se questa curva è impiegata per esprimere le funzioni trovate, dopo un tempo* t*, l'applicata [l'ordinata] che corrisponde all'ascissa* x *sarà data da* $y = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t)$*, da cui si potrà ottenere facilmente la costruzione della curva* [...]."

In effetti, mi pare che non si possa esprimere analiticamente y in maniera più generale se non supponendo che essa sia una funzione di t e di s [cioè di x]. Ma secondo tale ipotesi si può trovare la soluzione del problema solo nel caso in cui le diverse forme assunte dalla corda vibrante possono essere scritte in una sola equazione.

D'Alembert fa propria la nozione di continuità introdotta da Euler nel secondo volume della sua *Introductio* (1748) e stabilisce che le soluzioni accettabili sono soltanto quelle per le quali la funzione f è continua.

La definizione di continuità di una curva

9. Ex hac linearum curvarum idea ſtatim ſequitur earum diviſio in *continuas*, & *diſcontinuas* ſeu *mixtas*. Linea ſcilicet curva *continua* ita eſt comparata, ut ejus natura per unam ipſius x Functionem definitam exprimatur. Quod ſi autem linea curva ita ſit comparata, ut variæ ejus portiones BM, MD, DM &c., per varias ipſius x Functiones exprimantur; ita ut, poſtquam ex una Functione portio BM fuerit definita, tum ex alia Functione portio MD deſcribatur; hujuſmodi lineas curvas *diſcontinuas* ſeu *mixtas* & *irregulares* appellamus: propterea quod non ſecundum unam legem conſtantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.

Dalle *Institutiones calculi differentialis*:

> *Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet , atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur* x *denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae vtcunque ab* x *pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur.*
>
> **Se alcune quantità dipendono da altre in maniera tale che se queste ultime sono variate anche le prime sono soggette a mutamento, quelle sogliono essere chiamate funzioni di queste; questa denominazione è la più estesa possibile e comprende tutti i modi con i quali una quantità può essere determinata a partire da altre. Dunque, se** x **denota una quantità variabile, tutte le quantità che dipendono da** x **in un modo qualunque o che da essa sono determinate, sono dette funzioni di questa.**

Funzioni, abbiamo visto sono intese da Euler come:

- espressioni analitiche

Ma che ne è del dominio di una funzione? Si tratta di una nozione che appare estranea alla mentalità del tempo, come emerge chiaramente dalla seguente circostanza.

Funzioni, abbiamo visto sono intese da Euler come:

- espressioni analitiche
- corrispondenza di una variabile da altre variabili e costanti (questa seconda definizione è probabilmente una risposta alla diatriba con D'Alembert)

Ma che ne è del dominio di una funzione? Si tratta di una nozione che appare estranea alla mentalità del tempo, come emerge chiaramente dalla seguente circostanza.

Sulla base di considerazioni di natura fisica, D. Bernoulli propose come più generale soluzione dell'equazione delle onde la serie (infinita):

$$y(x,t) = \alpha \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi ct}{L} + \beta \sin\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{2\pi ct}{L} + \dots,$$

i coefficienti della quale, se si assume la condizione iniziale $y(x,t) = f(x)$ per $t = 0$, devono essere tali che valga:

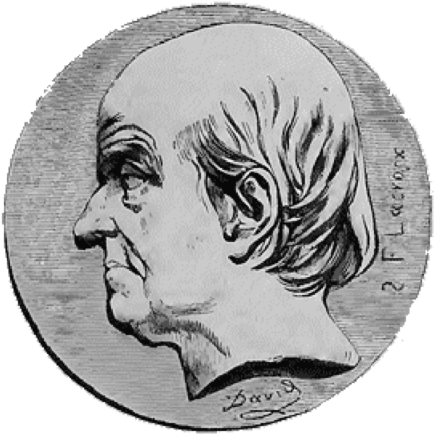
$$f(x) = \alpha \sin\frac{\pi x}{L} + \beta \sin\frac{2\pi x}{L} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{L} + \dots.$$

Cioè, una funzione "arbitraria" può essere espressa mediante sviluppo in serie trigonometriche. (Osserviamo però che Bernoulli non fornisce alcun argomento matematico a supporto di questa uguaglianza e nemmeno una tecnica che consenta, data la funzione $f(x)$, di ricavare i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \dots$)
Guardiamo alla risposta di Eulero a questo lavoro.

Eulero: *Remarques sur les mémoires précedens de M. Bernoulli*, 1753

IX. Mais peut-être repliquera-t-on, que l'équation $y = \alpha\,\text{ſin}\,\frac{\pi x}{a} + \&c.$ à cauſe de l'infinité de coëfficiens indéterminés, eſt ſi générale, qu'elle renferme toutes les courbes poſſibles: & il faut avouër, que ſi cela étoit vray, la méthode de M. *Bernoulli* fourniroit une ſolution complette. Mais, outre que ce grand Géometre n'a pas fait cette objection, toutes les courbes compriſes dans cette équation, quoiqu'on augmente le nombre des termes à l'infini, ont de certains caractères, qui les diſtinguent de toutes autres courbes. Car ſi l'on prend l'abſciſſe x négative, l'appliquée devient auſſi négative, & égale à celle qui repond à l'abſciſſe poſitive x; de même l'appliquée qui répond à l'abſciſſe $a + x$, eſt négative, & égale à celle qui convient

vient à l'abſciſſe x. Donc ſi la courbe, qu'on aura donnée à la corde au commencement, n'a point ces propriétés, il eſt certain qu'elle n'eſt pas renfermée dans ladite équation. Or aucune courbe algébrique ne ſauroit avoir ces propriétés, qu'il faut donc toutes exclure de cette équation; & il n'y a aucun doute, qu'il n'en faille auſſi exclure une infinité de courbes tranſcendentes.



Gli antichi Analisti generalmente intendevano sotto la denominazione di funzioni di una quantità, tutte le potenze di questa quantità. Nel seguito si è esteso il significato di questo termine, applicandolo ai risultati di varie operazioni algebriche: si è così chiamato ancora funzione di una o più quantità, qualsiasi espressione algebrica contenente in un modo qualunque somme, prodotti, quozienti, potenze e radici di queste quantità. Infine, nuove idee, scaturite dal progresso dell'analisi, hanno dato origine alla seguente definizione di funzione: Qualsiasi quantità il cui valore dipende da una o più altre quantità si dice funzione di quest'ultima, sia che si conoscano o meno le operazioni attraverso le quali si deve passare per ricavare da esse la prima quantità.

Joseph Fourier (1768-1830)

Una funzione generale $f(x)$ è una successione di valori o di ordinate, ciascuna delle quali è arbitraria. [...] In nessun modo si assume che queste ordinate siano soggette a una legge generale; possono susseguirsi l'una all'altra in una maniera completamente arbitraria e ognuna di esse è definita come se fosse un'unica quantità. Dalla natura del problema stesso e dalla sua analisi, può sembrare che la transizione da una ordinata alla successiva debba procedere in maniera continua. Ma in tal caso parliamo di condizioni speciali, mentre l'equazione generale (B) [cioè lo sviluppo in serie di Fourier] considerata in se stessa, è indipendente da queste condizioni. Essa è valida anche per funzioni discontinue.

Nicolaj Lobachevski (1892-1856)

The general concept of a function requires that a function of x be defined as a number given for each x and varying gradually with x. The value of the function can be given either by an analytic expression, or by a condition that provides a means of examining all numbers and choosing one of them; or finally, the dependence may exist and remain unknown. For example x^3 is a function of x that is expressed analytically; but the root of an equation of degree five is a function of the last term for which no analytic expression has been found and which is determined by the equation as a condition... Finally the conditions to which a function is subject may be as yet unknown, while the fact of the dependence of the numbers undoubtedly exists already. In such a case, the assumption that the function can be expressed analytically must be called arbitrary. It is true that no examples have yet been encountered in which the dependence of the numbers cannot be represented directly or hypothetically by an analytic expression; however, we should not be positive that another assumption would not lead to a new solution...

It seems impossible to doubt either that everything in the universe can be represented by numbers or that every change and relation in it can be represented by an analytic expression. At the same time, a broad view of the theory admits the existence of a dependence in the mere sense of regarding numbers that have some connection with each other as jointly given. Thus in his *Calcul des fonctions*, with which he tried to replace the differential calculus, Lagrange damaged the scope of the concept by the same amount that he thought to gain in rigor of argument. Thus, under the name of function we must understand in general a number whose gradual variations are known and depend on the variations of another, even though it be in a completely unknown manner. [Traduzione tratta da Medvedev, 1991]

Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Uber die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen, 1837:
Si pensi di indicare con a e b due valori fissati e con x una grandezza variabile, che possa assumere tutti i valori compresi tra a e b. Ora, ad ogni x corrisponda un unico y finito e tale che, mentre x percorre con continuità l'intervallo da a a b, $y = f(x)$ vari in maniera del tutto simile; allora y si dice funzione continua di x in quest'intervallo. Per ciò, non è affatto necessario che y sia dipendente da x secondo la stessa legge nell'intero intervallo; neppure occorre pensare a una dipendenza esprimibile attraverso operazioni matematiche. Rappresentata geometricamente, cioè pensate la x e la y come ascisse e ordinate, una funzione continua appare come una curva connessa (zusammenhängende Kurve) di cui ad ogni valore dell'ascissa compreso tra a e b corrisponde un solo punto. Questa definizione non impone un'unica legge per le varie parti della curva; questa si può pensare composta delle più diverse parti o disegnata del tutto arbitrariamente. Ne segue che una simile funzione si deve considerare completamente determinata su un intervallo quando o è data graficamente per l'intero intervallo oppure, matematicamente, quando è sottoposta per le varie parti dell'intervallo a leggi valide in esse. Anche quando si sia determinata una funzione per una parte dell'intervallo, rimane del tutto arbitraria la maniera in cui prolungare la funzione nella parte restante dell'intervallo.

- Il testo appena citato di Dirichlet è stato da molti interpretato come l'atto di nascita della nozione odierna di funzione (ad sempio Hankel, Weierstrass, e più recentemente anche Bell).

- Il testo appena citato di Dirichlet è stato da molti interpretato come l'atto di nascita della nozione odierna di funzione (ad sempio Hankel, Weierstrass, e più recentemente anche Bell).
- Dovremmo tuttavia riflettere sul fatto che, come per Lobachevski, l'intento di Dirichlet era quello di mettere in guardia il lettore dalla idea che la nozione di continuità adottata coincidesse con quella di Euler (funzione espressa tramite un'unica espressione analitica).

- Il testo appena citato di Dirichlet è stato da molti interpretato come l'atto di nascita della nozione odierna di funzione (ad sempio Hankel, Weierstrass, e più recentemente anche Bell).
- Dovremmo tuttavia riflettere sul fatto che, come per Lobachevski, l'intento di Dirichlet era quello di mettere in guardia il lettore dalla idea che la nozione di continuità adottata coincidesse con quella di Euler (funzione espressa tramite un'unica espressione analitica).
- Del resto, l'introduzione della nozione di funzione intesa come una legge di corrispondenza arbitraria risaliva a Euler e fu poi adottata da molti (Lacroix, Fourier)

- Il testo appena citato di Dirichlet è stato da molti interpretato come l'atto di nascita della nozione odierna di funzione (ad sempio Hankel, Weierstrass, e più recentemente anche Bell).
- Dovremmo tuttavia riflettere sul fatto che, come per Lobachevski, l'intento di Dirichlet era quello di mettere in guardia il lettore dalla idea che la nozione di continuità adottata coincidesse con quella di Euler (funzione espressa tramite un'unica espressione analitica).
- Del resto, l'introduzione della nozione di funzione intesa come una legge di corrispondenza arbitraria risaliva a Euler e fu poi adottata da molti (Lacroix, Fourier)
- Ciò che conta, più che le definizioni (puramente nominali), è l'uso che delle definizioni i matematici fanno:

Qualche considerazione conclusiva

- Lo stesso Dirichlet nel medesimo lavoro scriveva: "La curva la cui ascissa è β e la cui ordinata è $f(\beta)$ consiste di pi pezzi, la cui connessione è interrotta nei punti dell'asse delle ascisse che corrispondono a quei particolari valori di β, e **per ognuna di tali ascisse corrispondono di fatto due ordinate**, di cui l'una appartiene alla porzione di curva che termina in quel punto e l'altra alla porzione che vi comincia. Nel seguito sarà necessario distinguere **questi due valori di** $f(\beta)$ e li indicheremo con $f(\beta - 0)$ e $f(\beta + 0)$". [Grassetto mio]

- Lo stesso Dirichlet nel medesimo lavoro scriveva: "La curva la cui ascissa è β e la cui ordinata è $f(\beta)$ consiste di pi pezzi, la cui connessione è interrotta nei punti dell'asse delle ascisse che corrispondono a quei particolari valori di β, e **per ognuna di tali ascisse corrispondono di fatto due ordinate**, di cui l'una appartiene alla porzione di curva che termina in quel punto e l'altra alla porzione che vi comincia. Nel seguito sarà necessario distinguere **questi due valori di** $f(\beta)$ e li indicheremo con $f(\beta-0)$ e $f(\beta+0)$". [Grassetto mio]
- Se davvero si vuole individuare l'atto di nascita della odierna definizione (e comunque non quella di Bourbaki con cui abbiamo aperto), nel senso di un suo uso coerente e sistematico, questo può essere rintracciato nella *Scritto di abilitazione* (*Ueber di Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*) di Bernhard Riemann, 1854. Sotto più di un aspetto, questo lavoro segna la nascita della moderna teoria delle funzioni di variabile reale.