

Dalle formule alle relazioni funzionali

Giorgio Bolondi, Free University of Bozen-Bolzano

Lucca, 12 settembre 2022

*Il complesso rapporto tra i segni che usiamo e gli oggetti matematici
(qualunque cosa questo significhi) di riferimento*

*Diverse
epistemologie*

Molti approcci teorici

ANNA SFARD

ON THE DUAL NATURE OF MATHEMATICAL
CONCEPTIONS: REFLECTIONS ON PROCESSES AND
OBJECTS AS DIFFERENT SIDES OF THE SAME COIN

ABSTRACT. This paper presents a theoretical framework for investigating the role of algorithms in mathematical thinking. In the study, a combined ontological-psychological outlook is applied. An analysis of different mathematical definitions and representations brings us to the conclusion that abstract notions, such as number or function, can be conceived in two fundamentally different ways: *structurally* – as objects, and *operationally* – as processes. These two approaches, although ostensibly incompatible, are in fact complementary. It will be shown that the processes of learning and of problem-solving consist in an intricate interplay between operational and structural conceptions of the same notions.

On the grounds of historical examples and in the light of cognitive schema theory we conjecture that the operational conception is, for most people, the first step in the acquisition of new mathematical notions. Thorough analysis of the stages in concept formation leads us to the conclusion that transition from computational operations to abstract objects is a long and inherently difficult process, accomplished in three steps: *interiorization*, *condensation*, and *reification*. In this paper, special attention is given to the complex phenomenon of reification, which seems inherently so difficult that at certain levels it may remain practically out of reach for certain students.

Il rapporto tra processi e oggetti (A. Sfard)

Raymond Duval

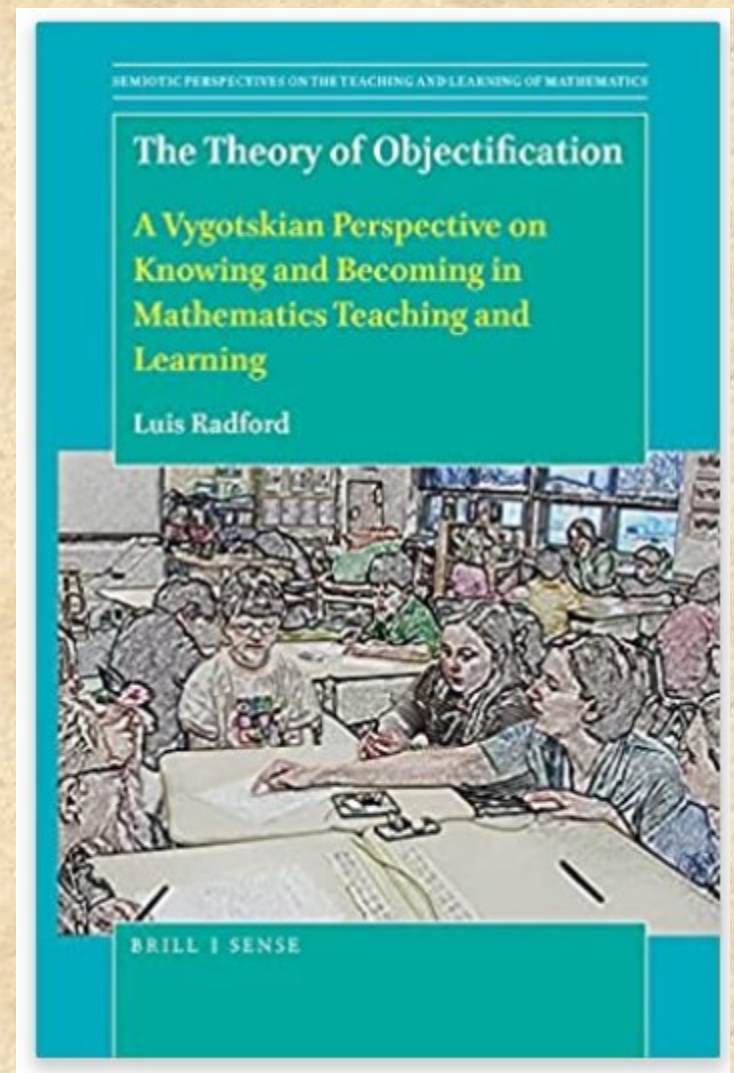
Understanding the
Mathematical Way
of Thinking – The
Registers of Semiotic
Representations

Edited by Tânia M.M. Campos



 Springer

La teoria dei registri delle
rappresentazioni semiotiche (R. Duval)



La teoria dell'oggettivazione (L. Radford)

ICME-13 Topical Surveys

Norma Presmeg
Luis Radford
Wolff-Michael Roth
Gert Kadunz

Semiotics in Mathematics Education



Un problema ineludibile

Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving

Gagatsis & Shiakalli

Educational psychology 24 (5), 645-657

*Problema che tutti gli
insegnanti conoscono: le
diverse rappresentazioni di
uno stesso oggetto*

INVALSI, Grado 05, 2010

D27. $\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

- A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- D. Sì, perché valgono entrambi la metà di un intero

INVALSI, Grado 05, 2010

Domande a risposta multipla



Risposta A 9.1%

Risposta B 19%

Risposta C 15.3%

Risposta D 53.4%

Mancate e non valide 3.2%

INVALSI, Grado 05, 2016

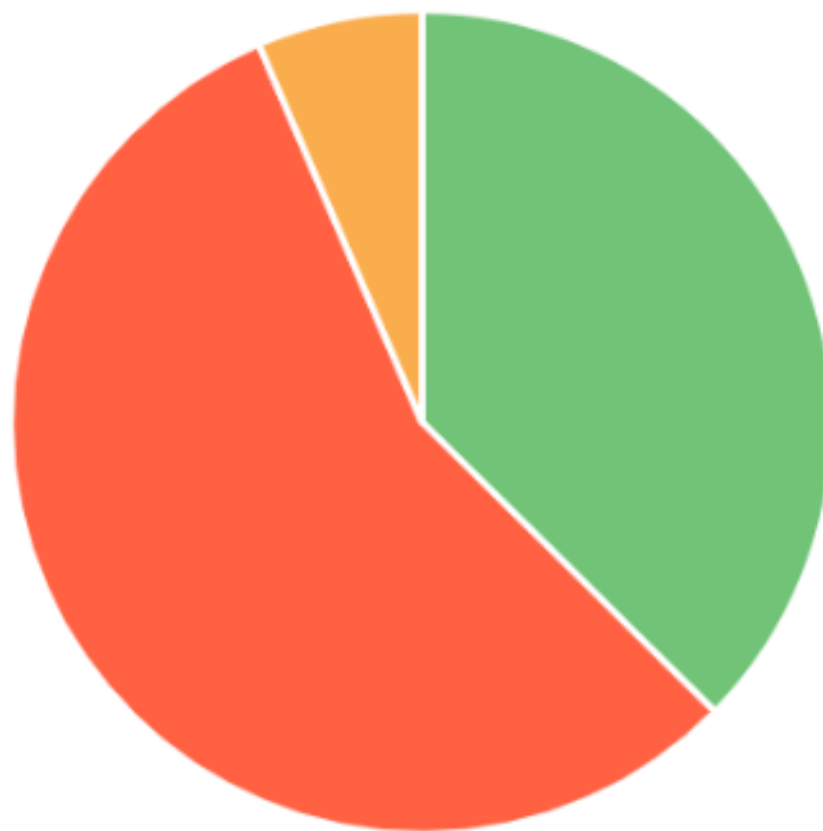
D25. Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri.

50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.

INVALSI, Grado 05, 2016

Risposte corrette



- Risposte corrette 37.4%
- Risposte errate 56.1%
- Risposte Mancate 6.5%

INVALSI, Grado 05, 2016

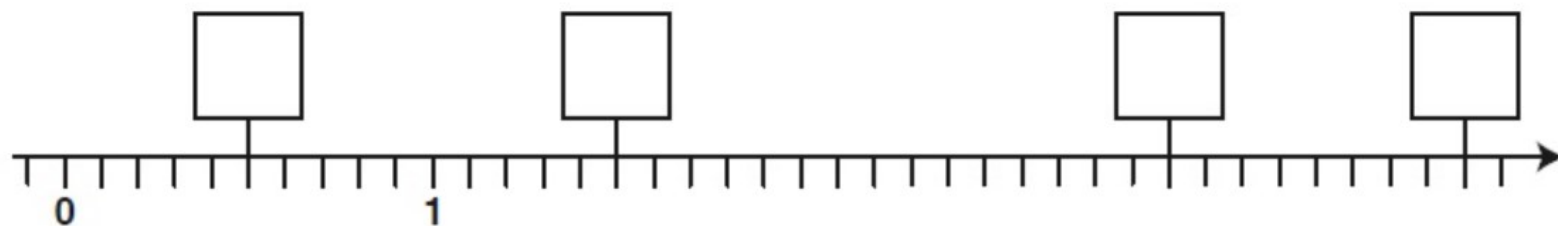
D30. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri:

1,5

$\frac{6}{2}$

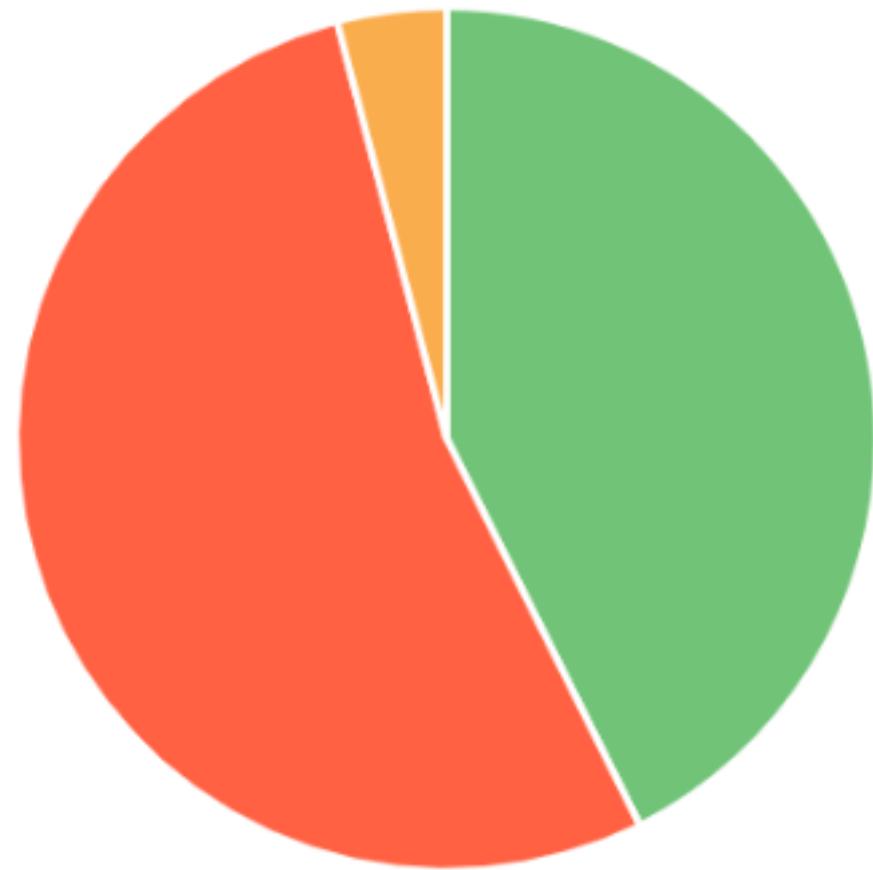
3,8

$\frac{1}{2}$



INVALSI, Grado 05, 2016

Risposte corrette

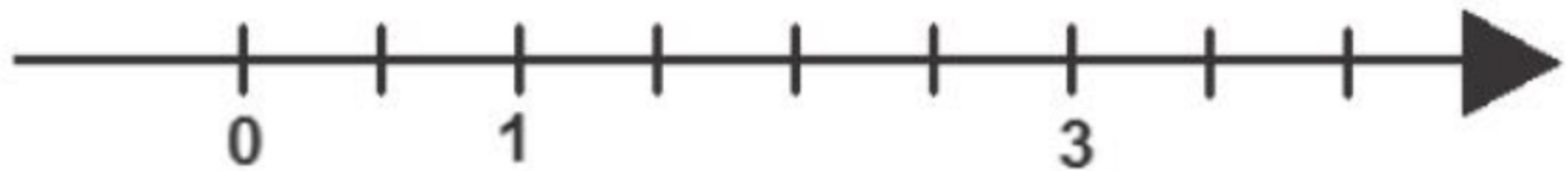


- Risposte corrette 42.6%
- Risposte errate 53.3%
- Risposte Mancate 4.1%

INVALSI, Grado 06, 2011

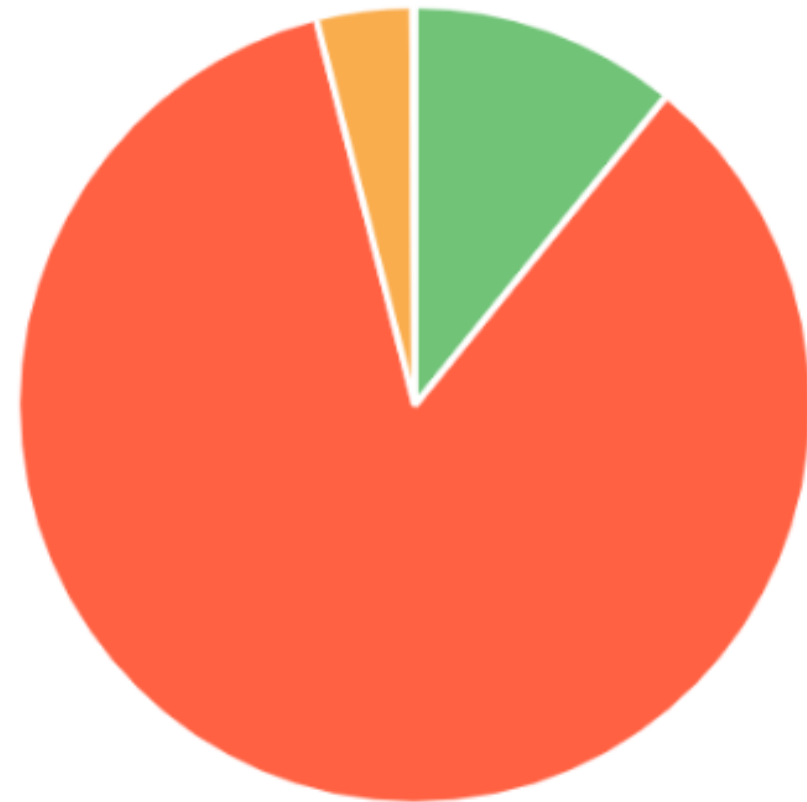
D8. Posiziona sulla retta i seguenti numeri:

2 2,5 $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{10}$



INVALSI, Grado 06, 2011

Risposte corrette



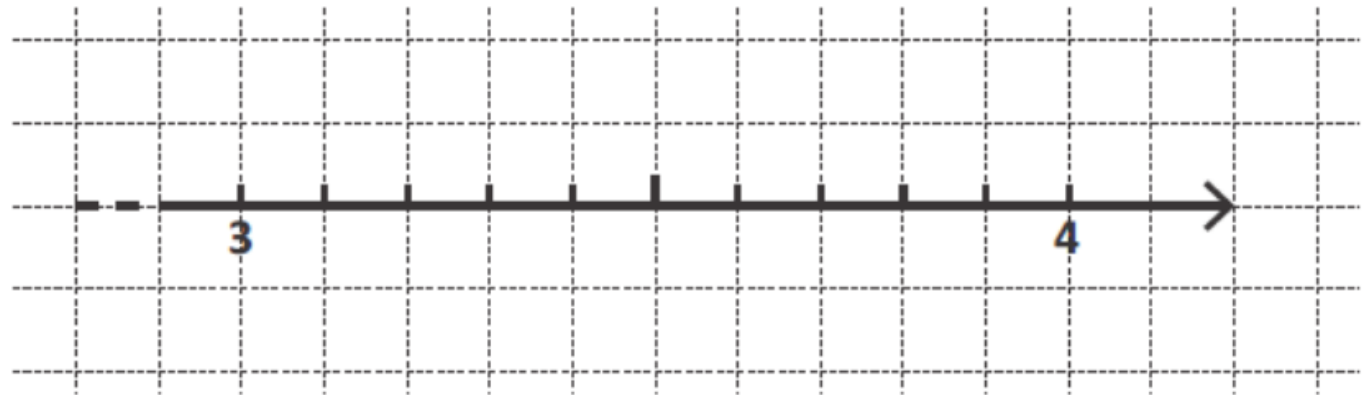
- Risposte corrette 10.9%
- Risposte errate 85.1%
- Risposte Mancate 3.9%
- Altre non valide. 0.1%

INVALSI, Grado 08, 2014

a. Scrivi nei riquadri i seguenti numeri in ordine dal più piccolo al più grande:

π ; $\sqrt{16}$; 3,60; $\frac{335}{100}$

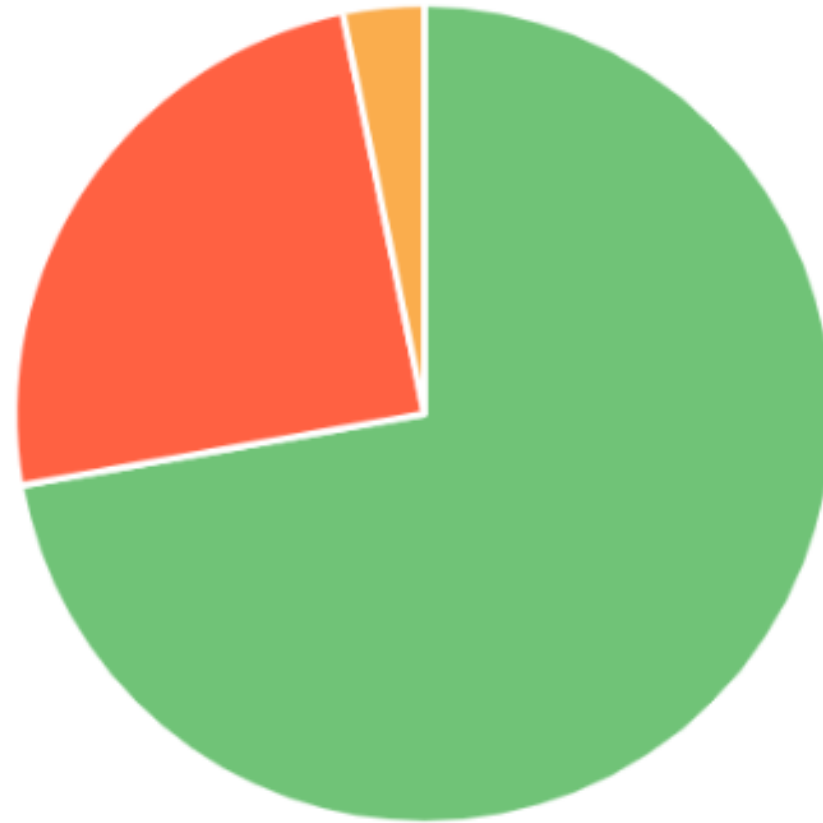
--	--	--	--



b. Ora collega con una freccia i numeri che hai scritto nei riquadri con la loro posizione approssimata sulla retta.

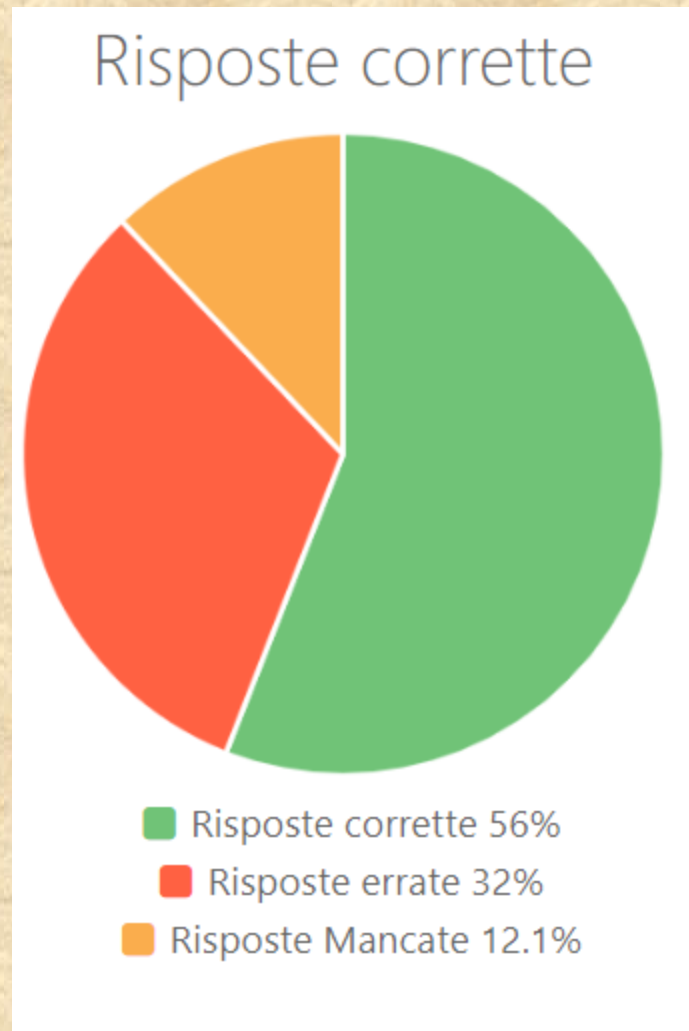
INVALSI, Grado 08, 2014
Item a

Risposte corrette



- Risposte corrette 72.2%
- Risposte errate 24.6%
- Risposte Mancate 3.2%

INVALSI, Grado 08, 2014
Item b



INVALSI, Grado 05, 2009

2. Quale frazione è uguale al numero 20,895?

A. $\frac{20895}{100}$.

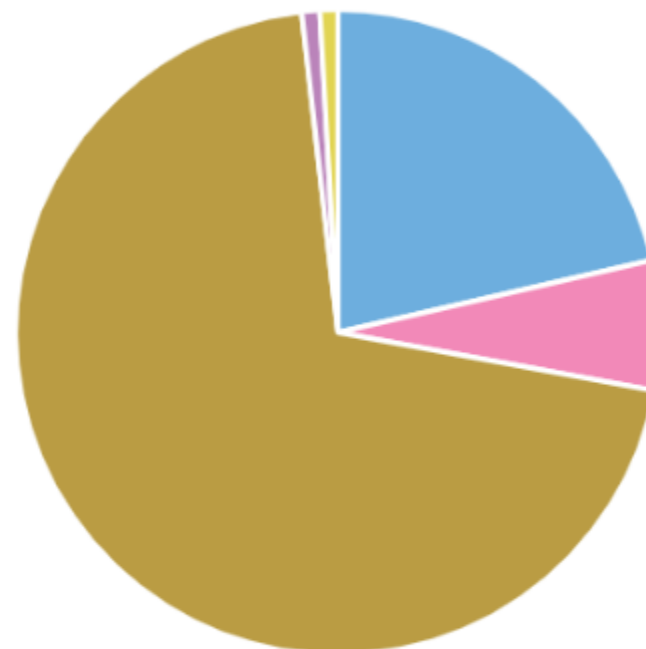
B. $\frac{20895}{10}$.

C. $\frac{20895}{1000}$.

D. $\frac{20895}{50}$.

INVALSI, Grado 05, 2009

Domande a risposta
multipla



Risposta A 21.4%

Risposta B 6.5%

Risposta C 70.3%

Risposta D 0.9%

Mancate e non valide 0.9%

Trasformazioni di
conversione
trasformazioni di
trattamento

Raymond Duval

Understanding the
Mathematical Way
of Thinking – The
Registers of Semiotic
Representations

Edited by Tânia M.M. Campos



 Springer

La teoria dei registri delle
rappresentazioni semiotiche (R. Duval)

La nozione di intorno circolare

“Intorno di centro x_0 e raggio r ”

La nozione di intorno circolare

“Intervallo aperto di estremi $x_0 - r$ e $x_0 + r$ ”

La nozione di intorno circolare

“I punti che hanno dal punto x_0 distanza minore di r ”

La nozione di intorno circolare

“Il disco aperto di centro x_0 e raggio r ”

La nozione di intorno circolare

$$I_r(x_0)$$

La nozione di intorno circolare

$$|x - x_0| < r$$

La nozione di intorno circolare

$$]x_0 - r, x_0 + r[$$

La nozione di intorno circolare

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

La nozione di intorno circolare

$$-r < x - x_0 < r$$

La nozione di intorno circolare

$$\underline{\underline{x_0}} + r > x > x_0 - r$$

La nozione di intorno circolare

$$-r < x - x_0 < r$$

La nozione di intorno circolare

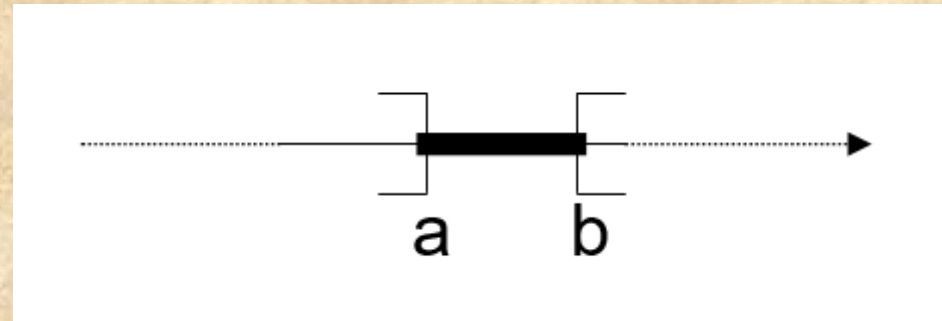
$$x_0 - r < x$$
$$x < x_0 + r$$

La nozione di intorno circolare

$$-r < x - x_0$$

$$x - x_0 < r$$

La nozione di intorno circolare



La nozione di intorno circolare

$$x = x_0 + t, -r < t < r$$

La nozione di intorno circolare


$$x = (1-t)(x_0 - r) + t(x_0 + r), \quad 0 < t < 1.$$

Come cambia il significato di una stessa rappresentazione lungo il percorso scolastico?

Come si collega il significato di questa rappresentazione all'apparire e scomparire di altre rappresentazioni?

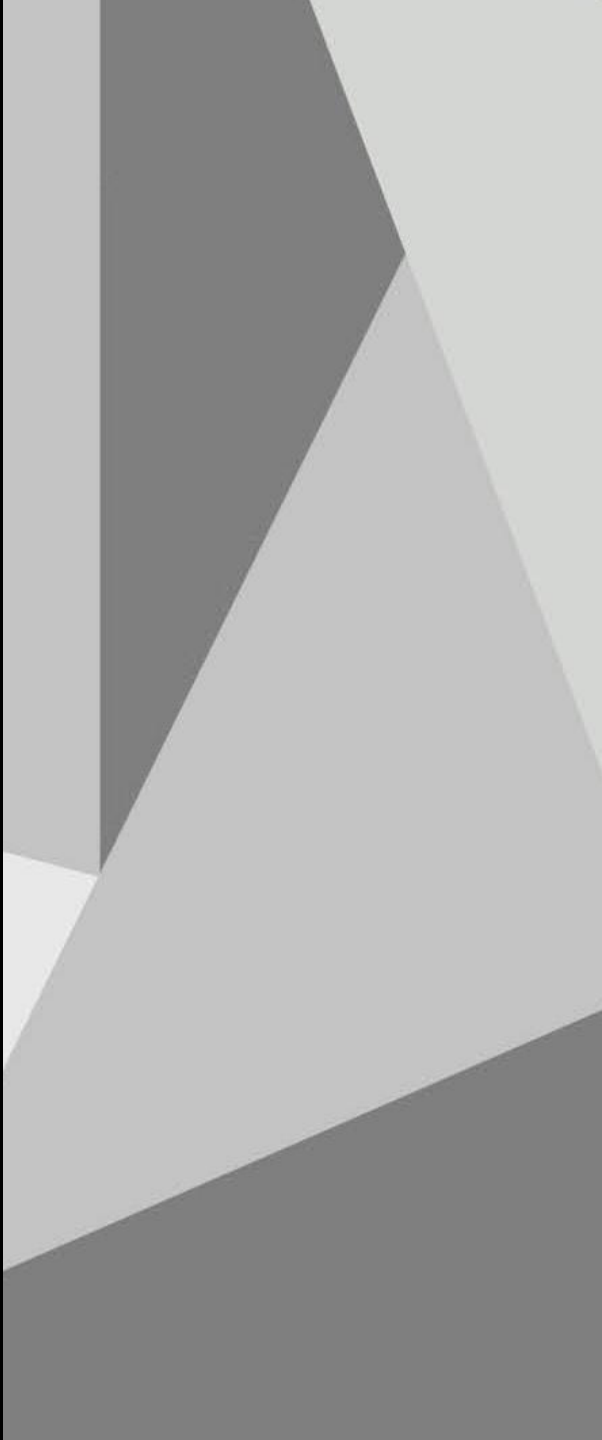
Come si collega questa dinamica all'evoluzione del pensiero matematico?

In particolare, come si intreccia con il passaggio da una visione statica a una dinamica di una specifica situazione?



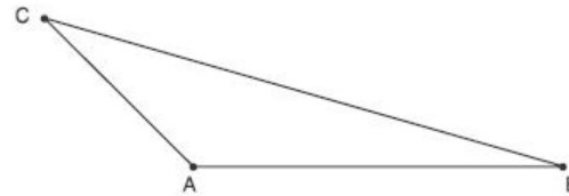
La formula per
l'area di un
triangolo

Dalla quarta
primaria alla
seconda superiore



La formula per l'area di un triangolo

D6. Osserva il disegno.



Calcola l'area del triangolo prendendo con un righello le misure necessarie.

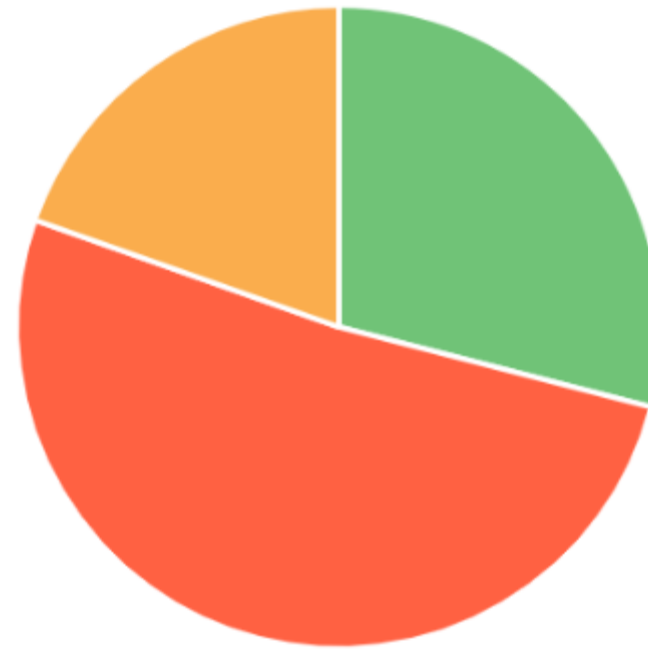
a. Risposta:cm²

b. Scrivi i calcoli che hai fatto per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....

La formula per l'area di un triangolo

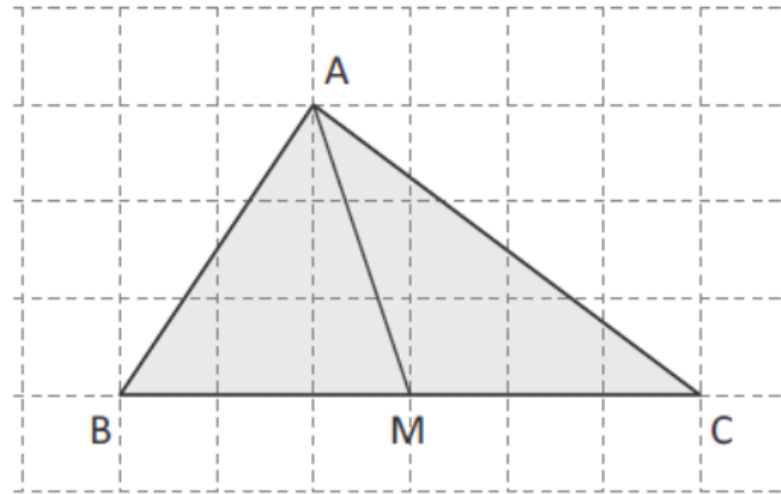
Risposte corrette



- Risposte corrette 29%
- Risposte errate 51.4%
- Risposte Mancate 19.6%

La formula per l'area di un triangolo

D22. Nel triangolo in figura il segmento AM congiunge il vertice A con il punto medio M del lato BC . Il triangolo risulta così diviso in due triangoli.

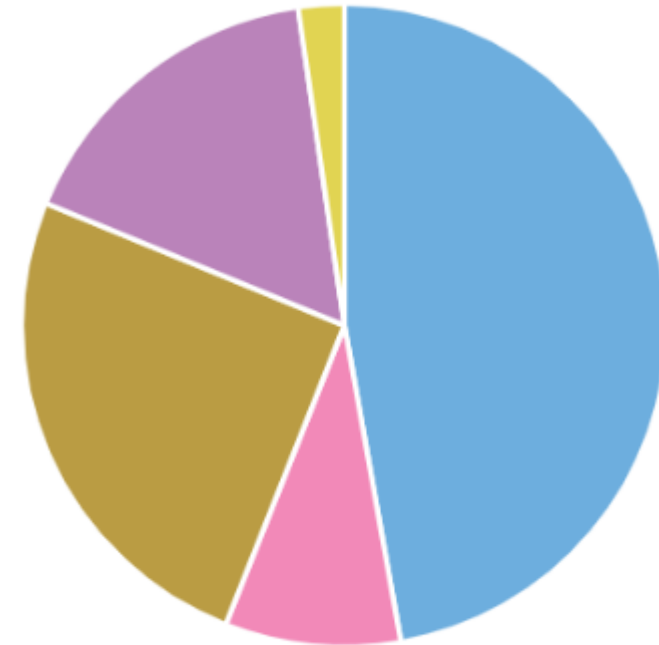


I due triangoli ABM ed AMC risultano tra loro equivalenti?

- A. Sì, perché i triangoli ABM e AMC hanno una base e la relativa altezza di uguali lunghezze
- B. Sì, perché il lato AM è in comune ai triangoli ABM e AMC
- C. No, perché i triangoli ABM e AMC non sono congruenti
- D. No, perché il segmento AM è la mediana relativa al lato BC del triangolo ABC

La formula per l'area di un triangolo

Domande a risposta multipla



Risposta A 47.2%

Risposta B 8.8%

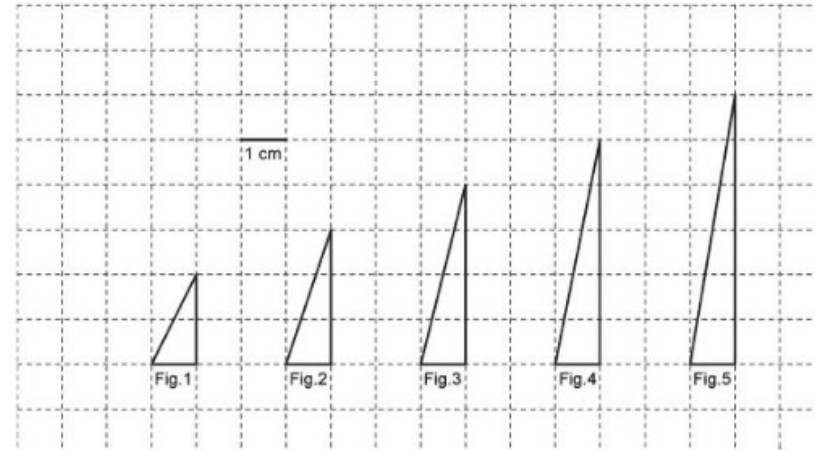
Risposta C 25.2%

Risposta D 16.5%

Mancate e non valide 2.3%

La formula per l'area di un triangolo

D21. Osserva i seguenti triangoli.



a. Da un triangolo al successivo l'area del triangolo:

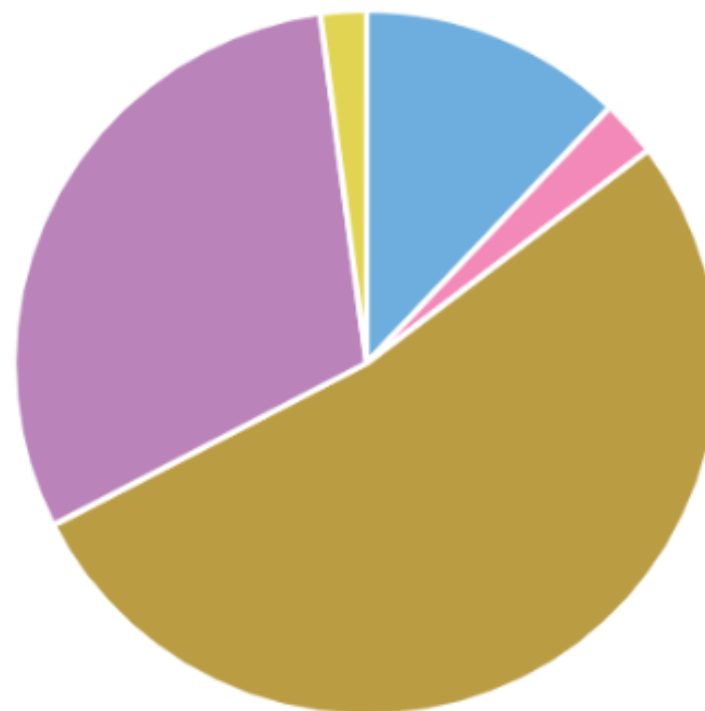
- A. Raddoppia
- B. Triplica
- C. Aumenta di 1 cm^2
- D. Aumenta di $0,50 \text{ cm}^2$

b. Se l'altezza dei triangoli continua ad aumentare di 1 cm da una figura alla successiva, quanti centimetri misurerà l'altezza del triangolo della figura 100?

- A. 102
- B. 101
- C. 100
- D. 99

La formula per l'area di un triangolo

Domande a risposta multipla



Risposta A 12.1%

Risposta B 2.6%

Risposta C 52.7%

Risposta D 30.5%

Mancate e non valide 2.1%


$$A = bxh/2$$

- Una “sequenza di box da riempire con numeri”
-



—

$$A = bxh/2$$

- Una “sequenza di box da riempire con numeri”

- TRE sequenze di box da riempire con numeri
- - $b = Ax^2/h$; $h = Ax^2/b$



—

$$A = bxh/2$$

- Una “sequenza di box da riempire con numeri”

- TRE sequenze di box da riempire con numeri
- - $b = Ax^2/h$; $h = Ax^2/b$

- Una relazione tra le misure degli elementi di un triangolo



—

$$A = bxh/2$$

- Una “sequenza di box da riempire con numeri”

- TRE sequenze di box da riempire con numeri
- - $b = Ax^2/h$; $h = Ax^2/b$

- Una relazione tra le misure degli elementi di un triangolo

- Una relazione tra gli Elementi di un qualunque Triangolo



—

$$A = bxh/2$$

- Una “sequenza di box da riempire con numeri”

- TRE sequenze di box da riempire con numeri
- - $b = Ax^2/h$; $h = Ax^2/b$

- Una relazione tra le misure degli elementi di un triangolo

- Una relazione tra gli Elementi di un qualunque Triangolo

- Una relazione funzionale tra gli elementi di una famiglia di triangoli



—

$$A = bxh/2$$

- Una “sequenza di box da riempire con numeri”

- TRE sequenze di box da riempire con numeri
- - $b = Ax^2/h$; $h = Ax^2/b$

- Una relazione tra le misure degli elementi di un triangolo

- Una relazione tra gli Elementi di un qualunque Triangolo

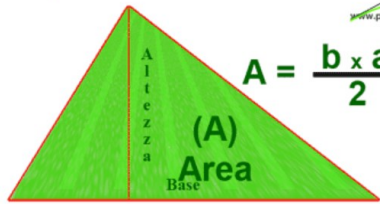
- Una relazione funzionale tra gli elementi di una famiglia di triangoli

- Una famiglia di funzioni le cui variabili e parametri sono misure degli elementi di triangoli



Formula per il calcolo dell'area del triangolo

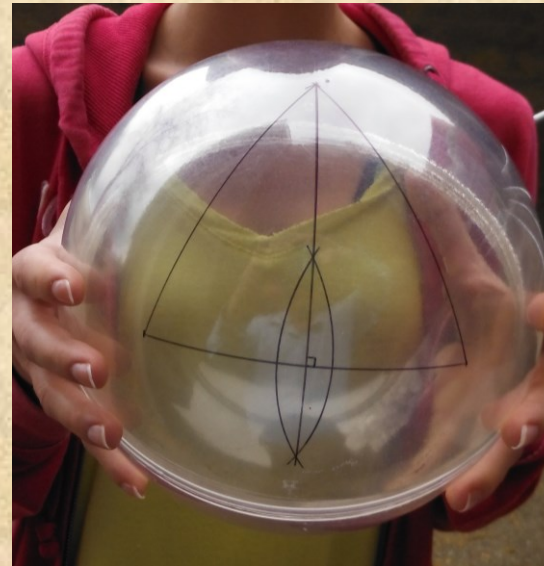
base per altezza diviso 2



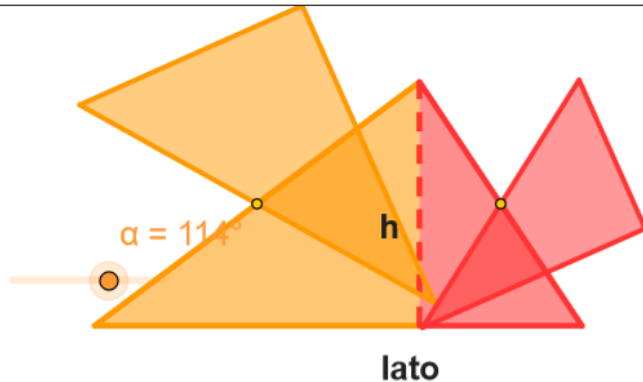
$$A = \frac{b \times a}{2}$$



www.pesi-e-misure.it



GeoGebra



$$\frac{1}{2} |\det M| \longrightarrow \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Questa stessa formula, che rimane un Oggetto di apprendimento costante, si interfaccia con altre rappresentazioni, che appaiono e scompaiono nel discorso di classe, e genera così flussi di conversioni (nel senso di Duval) tra una rappresentazione “che fa da pivot” e altre rappresentazioni

Un ostacolo epistemologico

Le lettere come “scatola in cui inserire un numero” o come “variabili”

Il punto di svolta
(matematico): il passaggio
dagli *oggetti singolarmente
intesi* alle *famiglie di oggetti*

Questioni linguistiche

Grazie!